地表面の起伏によって生じる散乱波について

埼玉大学　正会員　○茂木秀則・川上英二

1.　はじめに

山地や谷地形，崖地などの地表面の起伏によって複雑な地震応答が生じる（例えば文献 1）．本研究では複雑な地震応答を引き起こすメカニズムを検討するための手法として，境界要素法と摂動解法を組み合わせた手法を展開し，これに基づいて散乱波の生成のメカニズムを検討した．

2.　境界要素法[2),3)]

図–1 に示す二次元半無限弾性体における SH 波動場を考える．点 $\boldsymbol{X}$ における振動数領域の方程式として，次式の Helmholtz 方程式が得られる．

$$\left\{\nabla^2 + k_\beta^2\right\} u(\boldsymbol{X}) = 0\ , \quad k_\beta = \omega/\beta \tag{1}$$

ここで，β は S 波速度，ω は角振動数である．

境界が自由表面（$q(\boldsymbol{X})$=0, $\boldsymbol{X}$∈Γ）のみであること，下方から入射波が作用することに留意して，式 (1) を境界積分方程式に変換すると次式が得られる[3)]．

$$c(\boldsymbol{Y})u(\boldsymbol{Y}) + \mathrm{v.p.}\int_\Gamma q^*(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})\, u(\boldsymbol{X})\, d\Gamma(\boldsymbol{X}) = v(\boldsymbol{Y}) \tag{2}$$

$$q^*(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) = \frac{ik_\beta}{4} H_1^{(2)}(k_\beta r)\frac{\partial r}{\partial \boldsymbol{n}(\boldsymbol{X})} \tag{3}$$

ここで $v(\boldsymbol{Y})$ は Γ 上の点 $\boldsymbol{Y}$ における入射波の変位，r は二点 $\boldsymbol{X}$，$\boldsymbol{Y}$ の距離，$H_1^{(2)}$ は 1 次の第 2 種 Hankel 関数，v.p. は主値積分を表す．$c(\boldsymbol{Y})$ は $\boldsymbol{Y}$ における境界の形状によって決まる値であり，滑らかであるときには 1/2 である．

境界 Γ を J 個の境界要素（一定要素）Γ_j (j=1, ..., J) で離散化すると，式 (2) から次式の連立方程式が得られる．

$$\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{J} u(\boldsymbol{X}_m)\, h'_{jm} = v(\boldsymbol{Y}_j) \iff \frac{1}{2}\boldsymbol{H}'\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} \tag{4}$$

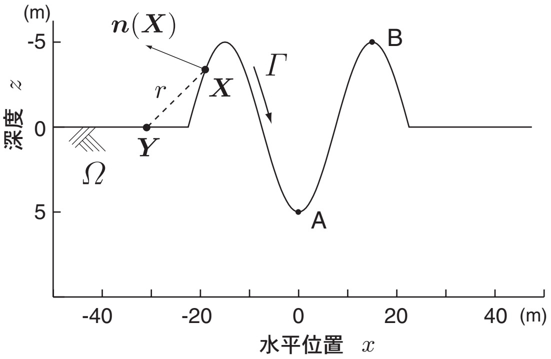
ここで，$\boldsymbol{u}$ は全ての境界要素の応答変位 $u(\boldsymbol{X}_j)$ を，$\boldsymbol{v}$ は入射波の振幅 $v(\boldsymbol{X}_j)$ の節点値を並べたベクトル，また，$\boldsymbol{H}'$ は式 (5) の h'_{jm} を成分とする正方行列で，各成分は次式で与えられる．

$$h'_{jm} = 2\int_{\Gamma_m} \frac{ik_\beta}{4} H_1^{(2)}(k_\beta r)\frac{\partial r}{\partial \boldsymbol{n}(\boldsymbol{X})}\, d\Gamma(\boldsymbol{X}) + \delta_{jm} \tag{5}$$

ここで，δ_{jm} は Kronecker のデルタである．なお，j=m のときには式 (5) 中の積分は主値積分であるが，一定要素を用いた境界要素法では常に 0 となる．

3.　境界要素－摂動解法と散乱波の寄与分布

単位行列 $\boldsymbol{E}$ に対して $\boldsymbol{H}' = \boldsymbol{E} - \boldsymbol{H}$ を満たす新たな正方行列 $\boldsymbol{H}$ を用いて $\boldsymbol{H}'^{-1}$ を Neumann 級数[4)]に展開すると，式 (4) 中の $\boldsymbol{u}$ の級数解が次式のように得られる．



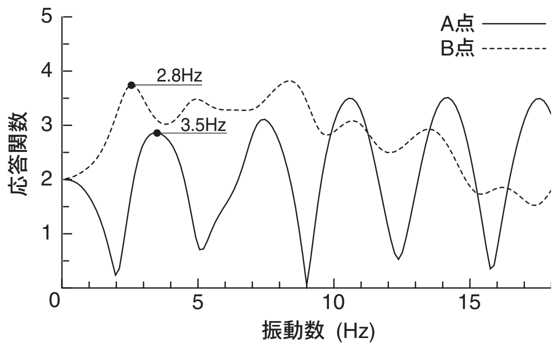
図–1　本研究で用いた地形モデルと A，B 二つの着目点

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u} &= (\boldsymbol{E}-\boldsymbol{H})^{-1}\, 2\boldsymbol{v} = \left(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{H}+\boldsymbol{H}^2+\cdots\right) 2\boldsymbol{v} \\ &= \boldsymbol{u}^{(0)} + \boldsymbol{u}^{(1)} + \boldsymbol{u}^{(2)} + \cdots \end{aligned}\tag{6}$$

式 (6) の右辺第 1 項 $\boldsymbol{u}^{(0)}$ は入射波のみによって生じる応答変位，第 2 項は一旦境界の各節点に入射した波動が散乱された後に他の節点に与える変位，すなわち 1 次散乱波による変位と考えることができる．第 3 項以降も同様に 2 次散乱波，3 次散乱波，. . . と解釈できる．また，式 (6) から，j 要素における ν 次散乱波の変位は $\boldsymbol{H}^\nu$ の j 行を抜き出した行ベクトルと入射波ベクトル $\boldsymbol{v}$ の内積で表される．従って，$\boldsymbol{H}$ の各成分が式 (7) で与えられることを考慮すれば，j 要素の一次散乱波による変位は，散乱波の波源となる m 要素から j 要素までの伝播を表す波動関数 $H_1^{(2)}(k_\beta r)$ と両者の位置関係が振幅に与える影響を表す係数項 $\partial r/\partial \boldsymbol{n}$ の二つのファクターに支配されることがわかる．

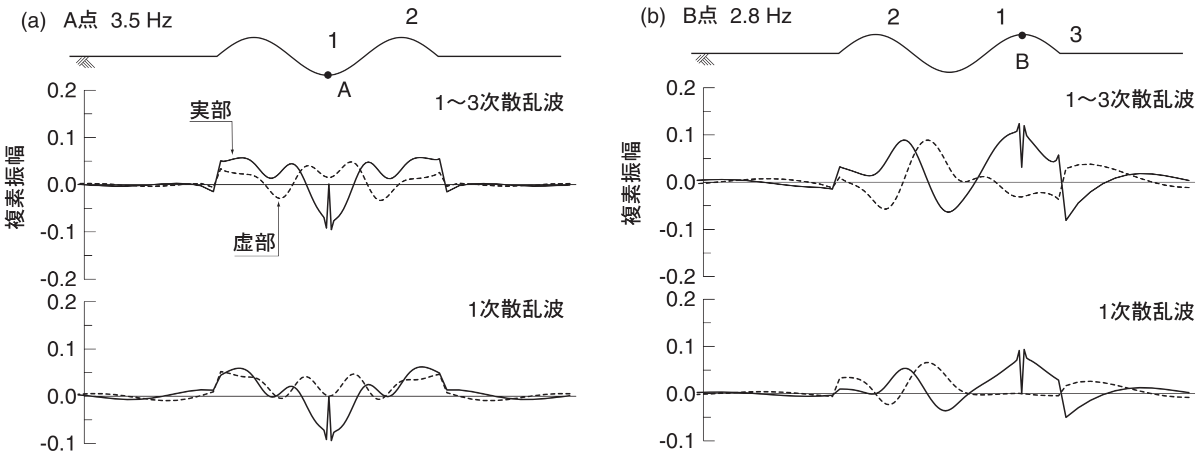
$$h_{jm} = -2\int_{\Gamma_m} \frac{ik_\beta}{4} H_1^{(2)}(k_\beta r)\frac{\partial r}{\partial \boldsymbol{n}(\boldsymbol{X})}\, d\Gamma(\boldsymbol{X}) \tag{7}$$

なお，単に $\boldsymbol{H}^\nu$ から成分を抜き出すだけでは，その値が境界要素 m の長さ dL_m に依存してしまうこと，また，起伏



図–2　平面波の鉛直入射に対する応答関数

キーワード　散乱波，起伏，境界要素－摂動解法
連絡先　〒 338-8570 埼玉県さいたま市桜区下大久保 255　TEL 048-858-3566



図–3　A 点と B 点への散乱波の寄与分布

に伴う入射波の位相の違いを別途考慮する必要があることから，以下の量を「散乱波の寄与」と定義した．

$$(\overline{H^\nu})_{jm} = (H^\nu)_{jm}\,\frac{v_m}{dL_m} \qquad (8)$$

ここで，$(\boldsymbol{H}^\nu)_{jm}$ は $\boldsymbol{H}^\nu$ の jm 成分を表す．

4.　解析例

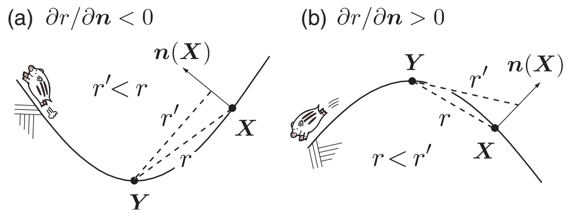
(1)　用いた地形モデルと着目点の応答関数

本研究で用いた地形モデルを**図–1** に示す．S 波速度 β は 100m/s とした．本研究では**図–1** に示すように，起伏の谷底（A 点）と頂上（B 点）を着目点として，それぞれの点における散乱波の寄与を検討した．**図–2** に二点の応答関数（全応答 $u(\boldsymbol{X})$）を示す．この図から，谷底（A 点）では応答関数の変動が激しいのに対し，頂上（B 点）では広い振動数帯域で増幅を示すことがわかる．

(2)　散乱波の寄与分布

図–3 は A，B それぞれの着目点に対する散乱波の寄与分布を示したものである．図の横軸は，散乱波の波源となる m 節点の水平座標，縦軸はその散乱波の着目点（j 節点）における寄与 $(\overline{H^\nu})_{jm}$ であり，図中の実線と破線はそれぞれ，着目点での入射波の振幅が最大振幅 1 となるときの寄与の実部と虚部を示す．**図–3(a)(b)** それぞれの上図が 1〜3 次散乱波の全寄与分布，下図が 1 次散乱波のみの寄与分布を示す．なお，振動数はそれぞれの着目点での応答関数が極大値を示すときのものである．

図–3(a)(b) のそれぞれの場合で上図，下図が似た分布を示していることから，各次数の散乱波のうち一次散乱波が支配的であることがわかる．また，**図–3(a)** を見ると，A 点には図中 1，2 の二カ所で散乱された波動が強く現れることがわかる．特に興味深いのは A 点のごく周囲（図中 1）で散乱された波動は A 点に対して負の寄与を与えることで，これは負であるため A 点での入射波の振幅を打ち消すように作用する．一方，**図–3(b)** を見ると，B 点には主に図中 1〜3 の三カ所で散乱された波動が強く現れることがわかる．これらのうち，図中 1 からの寄与は A 点の場合の 1 の寄与とは逆に正の寄与となっており，B 点の振幅を増加させるように作用する．これらの 2 点の着目点周囲からの寄与の違いは，式 (7) に示されるように $\partial r/\partial \boldsymbol{n}$ の符号の違いによるものと考えられ，**図–4** に示すように，その正負は着目点周囲の地表面の形状によって定まる．また，これらの寄与が大きくなるのは，着目点のごく周囲からの寄与であるため r が小さく，波動関数 $H_1^{(2)}(k_\beta r)$ が卓越するためと考えられる．また，この条件は $k_\beta r \ll 1$ で与えられるため，小さい r に対しては，広い範囲の振動数で成立する．このため，B 点の応答関数は広い振動数帯域で増幅を示すものと考えられる．なお，**図–3(b)** では，左の頂上付近から谷を回折して B 点に到達する散乱波が現れており（図中 2），起伏地形における地震応答を考える上で波動の回折の効果も重要であることがわかる．



図–4　**(a)** 谷底と **(b)** 頂上の近傍の点における $\partial r/\partial \boldsymbol{n}$ の符号

5.　まとめ

境界要素法と摂動解法を組み合わせた手法を展開し，これに基づいて地表面の起伏によって生じる散乱波の生成のメカニズムを検討した．

参考文献

1) Boore：A note on the effect of simple topography on seismic SH waves, *Bull. Seism. Soc. Am.*, **62**, **1**, 275–284, 1972.
2) 田中他：計算力学と CAE シリーズ 2 境界要素法，培風館，1991.
3) 加川：開領域問題のための有限／境界要素法，サイエンス社，1983.
4) 加藤：行列の摂動，丸山訳，シュプリンガー・フェアラーク東京，1999.
5) 茂木，川上：不整形地盤における入射境界増幅率と分布入射波平均増幅率，土木学会論文集，**605/I-45**，91-103，1998.