

有限要素 LES 乱流モデルの精度検証

中央大学大学院 学生員 ○倉橋 哲弘
中央大学 正会員 檜山 和男

1. はじめに

本研究は、従来ほとんど検討されてこなかった有限要素法による LES 乱流モデルの精度検証を行うものである。基礎方程式は非圧縮 Navier-Stokes 方程式及び連続式を、乱流モデルには LES に基づく Smagorinsky モデルを用いた。離散化には SUPG/PSPG 法に基づく安定化有限要素法を適用した。数値解析例にはチャンネル流れ問題を取り上げ、既存の参照解との比較により、本手法の妥当性及び精度の検証を行った。

2. 支配方程式

適当なフィルター関数によりフィルタリングされた非圧縮流体の連続式及び Navier-Stokes の運動方程式は総和規約表示で以下の通り与えられる。両式とも壁面摩擦速度 u_τ 、代表長さ δ 、流体密度 ρ により無次元化されている。上付き文字「 $\cdot$ 」はフィルタリングされている物理量を表す。

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (\text{in } \Omega), \quad (1)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - f_i = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} 2 \left(\frac{1}{Re_\tau} + \nu_{SGS} \right) \bar{D}_{ij} \quad (\text{in } \Omega), \quad (2)$$

$$\bar{D}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right). \quad (3)$$

ここで、 $\bar{u}_i$ は流速、 f_i は物体力、 Re_τ は Reynolds 数、 P は総圧をそれぞれ表す。また ν_{SGS} は SGS 渦動粘性係数であり、Smagorinsky¹⁾ モデルを用いて

$$\nu_{SGS} = (C_s f_s \Delta)^2 \sqrt{2 \bar{D}_{ij} \bar{D}_{ij}} \quad (4)$$

と表される。ここで、 C_s は Smagorinsky 定数である。また、 Δ はフィルター幅であり、本研究ではこれを四面体要素の体積の 3 乗根と定義する。また、 f_s は van Driest の壁面減衰関数であり、以下の通り定義される。

$$f_s = 1 - \exp \left(\frac{-y^+}{A^+} \right), \quad y^+ = \frac{u_\tau y}{\nu}, \quad u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}. \quad (5)$$

ここで、 y は壁面からの距離、 y^+ は壁座標、 ν は動粘性係数、 τ_w は壁面せん断応力をそれぞれ表す。また A^+ は定数であり、通例 $A^+ = 25$ が与えられる。

3. 数値解析手法

空間方向の離散化には、SUPG/PSPG 法²⁾に基づく安定化有限要素法を適用した上で、P1/P1（流速・圧力 1 次、四面体）要素を用いた。時間方向の離散化として、移流項の流速には 2 次精度 Adams-Bashforth 法、それ以外の流速

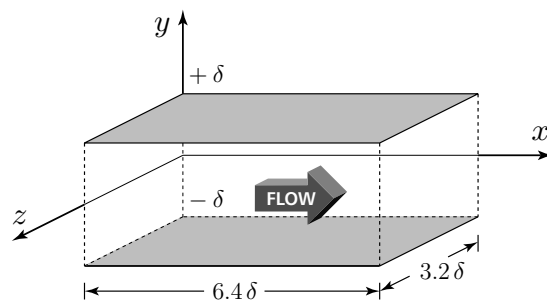


図-1 解析領域

表-1 計算ケース

case	Re_τ	分割数 ($x \times y \times z$)	各方向分割幅		
			Δx^+	Δy^+	Δz^+
A	150	$32 \times 40 \times 32$	30	1~14	15
B		$32 \times 64 \times 32$	30	1~10	15
C		$48 \times 64 \times 48$	20	1~10	10
D	400	$32 \times 64 \times 32$	80	1~28	40
E		$48 \times 64 \times 48$	53	1~28	27

には Crank-Nicolson 法（2 次精度）を用いた（連続式及び圧力は陰的扱い）。連立 1 次方程式の解法には Element-by-Element Bi-CGSTAB2 を用いた。

4. 数値解析例

(1) 計算条件

数値解析例として、流路幅 2δ をもつチャンネル流れ（平行平板流れ）³⁾ 解析を行った。解析領域は図-1 に示す通りである。 y 方向に垂直な壁面には非滑り条件を課し、 x, z 方向は周期的に取り扱った。また流れを保持するため、外力として一定の圧力勾配 $f_i = (1, 0, 0)$ を与えた。初期条件として、東京大学・笠木研究室所有の DNS データベース⁴⁾ から取得した値を、解析要素に合わせて線形補間し、その値に対してデータベースの流速変動量に一定倍率 R 及び $-1 \sim 1$ の乱数を掛けたものを加え、それを以て初期条件とした。Smagorinsky 定数、微小時間増分量は全ての計算に共通して $C_s = 0.1$ 、 $\Delta t = 5.0 \times 10^{-4}$ とした。

(2) 計算結果及び考察

a) 初期条件が解に及ぼす影響

まず、初期条件の乱れの大きさが解に及ぼす影響について検証するため、 $R = 100\%, 350\%, 600\%, 800\%$ の 4 通りについて計算を行った。計算に用いた要素分割及び Reynolds 数はいずれの計算も、表-1 における case A のものとした。

計算結果としてまず、各計算における主流方向の流速分布を図-2 に示す。初期条件の乱れが小さい $R = 100\%, 350\%$ においては、流れが完全に層流化しており、

KeyWords： 乱流解析, LES (Large Eddy Simulation), 安定化有限要素法, SUPG/PSPG

連絡先： 〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27 E-mail: kt-98426@kc.chuo-u.ac.jp

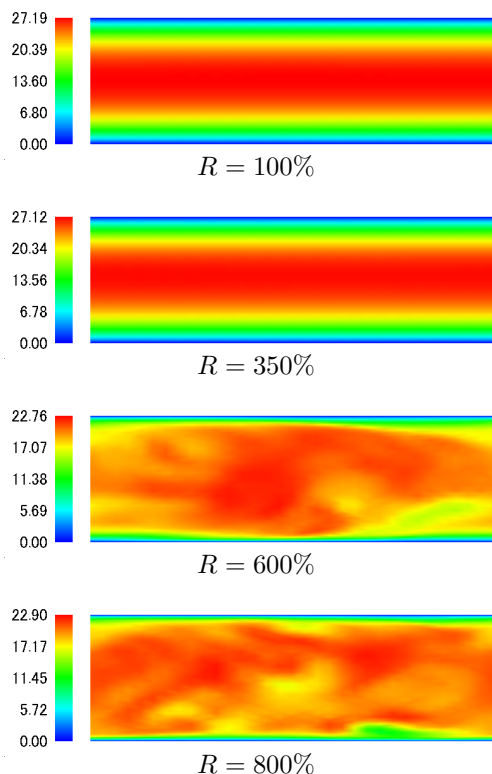


図-2 流れ方向の流速分布 ($z = 1.6\delta$ における $x-y$ 平面). いずれも $t = 60$ における瞬間値である.

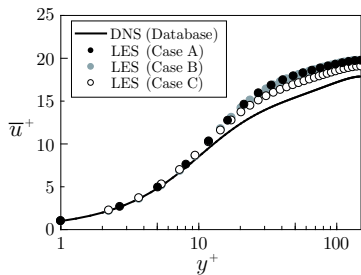


図-3 $Re_\tau = 150$ の平均流速分布 (case A, B, C)

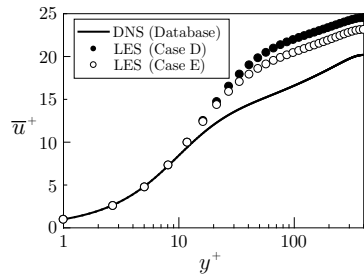


図-5 $Re_\tau = 400$ の平均流速分布 (case D, E)

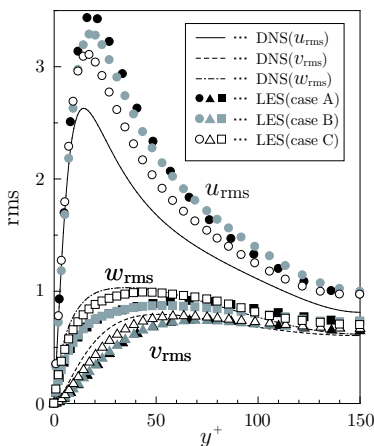


図-4 $Re_\tau = 150$ の乱流強度 (case A, B, C)

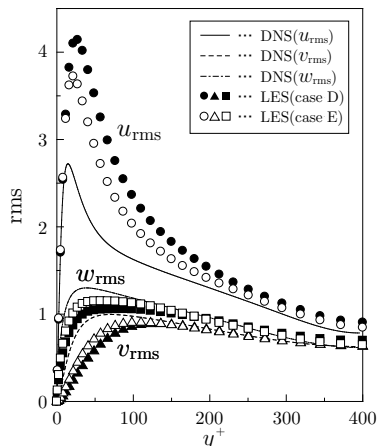


図-6 $Re_\tau = 400$ の乱流強度 (case D, E)

チャンネル中央部の流速が次第に増大する結果となった。一方、乱れの大きい $R = 600\%, 800\%$ においては乱流に遷移していることが分かる。以上のことから、流れが層流と乱流のどちらに遷移するかは、初期条件の乱れの大きさに依存することが判明した。

b) 要素分割及び Reynolds 数が解に及ぼす影響

計算は表-1 に示す 5 通りを行った。それぞれのケースにおいて Re_τ , 要素分割を変えている。なお、倍率 R は全てのケースについて 600% とした。

まず $Re_\tau = 150$ について考察する。case A, B, C の主流方向の平均流速分布及び乱流強度の分布をそれぞれ図-3, 4 に示す。いずれのケースも粘性底層内 ($y^+ < 11.6$) においては平均流速分布, 乱流強度とも DNS と良好な一致を示している。これに対しチャンネル中央部の平均流速は DNS と多少の誤差が見られる。case B の方が case A よりも y 方向に細かい要素分割を用いているにも関わらず、結果に差はほとんど見られない。乱流強度に関しても両者の差異は微小である。これに対し、 x, z 方向に細かい要素分割を用いている case C は、case B よりも精度が上がっている。以上より、本計算では y 方向よりも x, z 方向に対し分割を細かくした方が、より解の精度が上がる事が判明した。

$Re_\tau = 400$ に関しても同様の傾向が現れている。case D, E の主流方向の平均流速分布及び乱流強度の分布をそれぞれ図-5, 6 に示す。ただし、 $Re_\tau = 150$ の場合と比べて DNS との誤差が大きいことが分かる。要素分割をより細かくすれば精度が向上するものと予想されるが、LES の意義が

失われてしまう。その他に考えられる原因は Smagorinsky モデルの精度である。これを検証するには同モデルに代えて局所平衡仮定を用いていない Dynamic SGS モデルによる解と比較する必要がある、今後の課題としたい。

5. おわりに

本報告では、安定化有限要素法に基づく LES 乱流解析手法の構築及びその精度の検証をチャンネル乱流解析を通じて行った。その結果得た結論を以下に示す。

- 流れが層流と乱流のどちらに遷移するかは、初期条件の乱れの大きさに影響される。
- 壁面垂直方向よりも、他の 2 方向に要素分割を細かくした方が、解の精度向上を期待できる。
- いずれの解析でも、粘性底層内では DNS と良い一致を示したものの、チャンネル中央部では誤差が見られた。要素分割の不足及び Smagorinsky モデルの予測精度に起因しているものと思われる。

参考文献

- 1) J.Smogorinsky: General circulation experiments with the primitive equations I. the basic experiment, *Monthly Weather Review*, vol.91, pp.99-164, 1963.
- 2) T.E.Tezduyar: Stabilized finite element formulations for incompressible flow computations, *Advances in Applied Mechanics*, 28, pp.1-44, 1992.
- 3) J.Kim, P.Moin and R.Moser: Turbulence statistics in fully developed channel flow at low Reynolds number, *Journal of Fluid Mechanics*, vol.177, pp.133-166, 1987.
- 4) <http://www.thtlab.t.u-tokyo.ac.jp/>