

安定化有限要素法による熱対流解析における流出境界条件の検討

中央大学大学院 学生員 ○板橋 翔
中央大学 正会員 檜山 和男

1. 序言

流れの有限要素解析における流出境界条件としては Neumann 型境界条件に Stress-free Condition を用いる場合が多い。しかし、この条件は熱を伴う場合においては、熱が境界を横切って流出しないという断熱条件を表している。そのため、流出境界付近に熱が滞留してしまい、不自然な流れが生じてしまう。

そこで本論文では、熱対流解析において滑らかな流れの流出を実現するため、安定化有限要素法に基づく定式化において、従来有限要素法解析で用いられてきた流出境界条件と中山らによって提案された流出境界条件処理法¹⁾の考えを応用した流出境界条件との比較検討を行った。

2. 数値解析手法

(1) 基礎方程式

非圧縮性粘性流体を考え、Boussinesq 近似を仮定する。そのとき無次元化された運動方程式、連続式、エネルギー方程式はそれぞれ式 (1), (2), (3) で表される。

運動方程式；

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{Gr}{Re^2} T k = 0 \quad (1)$$

連続式；

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2)$$

エネルギー方程式；

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u_i \frac{\partial T}{\partial x_i} - \frac{1}{Pr Re} \frac{\partial^2 T}{\partial x_i^2} = 0 \quad (3)$$

u は流速, p は圧力, T は温度, $Re (= UL/\nu)$, $Gr (= g\beta(T_w - T_c)L^3/\nu^2)$ は Grashof 数, $Pr (= \nu/\alpha)$ は Prandtl 数, $Ra (= Pr \times Gr)$ は Rayleigh 数をそれぞれ表している。但し U は代表流速, L は代表長さ, ν は動粘性係数, g は重力加速度, α は温度伝導率, β は体膨張係数, T_w は高温壁温度, T_c は低温壁温度, k は鉛直方向の単位ベクトルをそれぞれ表している。

$$u_i = g_i \quad \text{on } \Gamma_g \quad (4)$$

$$\left\{ -p\delta_{ij} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right\} n_j = h_i \quad \text{on } \Gamma_h \quad (5)$$

$$T = \hat{T} \quad \text{on } \Gamma_T \quad (6)$$

$$\frac{1}{Re Pr} \frac{\partial T}{\partial n} = S \quad \text{on } \Gamma_S \quad (7)$$

ここで, g_i , h_i はそれぞれ流速, トラクションの既知量, $\hat{T}$ は壁面既知温度, S は壁面上の単位法線方向温度勾配, n_j は外向き単位法線ベクトルを示す。

(2) 流出境界条件処理

本論文では、境界積分項を未知量として扱う Free Outflow Boundary Condition(F.O.B.C) に線形移流型方程式の Sommerfeld's Radiation Condition(S.R.C) を組み込んだ境界条件を用いる。この方法は中山らによって提案された流出境界条件処理法¹⁾の考えを応用したものである。

F.O.B.C を用いた境界積分項の定式化の際, x 方向の単位法線ベクトルのみを考慮するものとする式 (5), (7) より, 以下の式 (8), (9) を得る。

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_h} w_i \left\{ -p\delta_{ij} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right\} n_j d\Gamma \\ &= \int_{\Gamma_h} w_i \left\{ -p\delta_{i1} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_i} \right) \right\} n_1 d\Gamma \quad (8) \end{aligned}$$

$$\int_{\Gamma_S} w S d\Gamma = \frac{1}{Re Pr} \int_{\Gamma_S} w \frac{\partial T}{\partial x} n_1 d\Gamma \quad (9)$$

ここで, S.R.C(式 (10)) により式 (11) を得る。

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + U_c \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \quad (10)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{1}{U_c} \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (11)$$

これらの式 (11) を式 (8), (9) に代入することにより以下の式が得られる。また, U_c は伝播速度である。

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_h} w_i h_i d\Gamma \\ &= \int_{\Gamma_h} w_i \left\{ -p\delta_{i1} + \frac{1}{Re} \left(-\frac{1}{U_c} \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_1}{\partial x_i} \right) \right\} n_1 d\Gamma \quad (12) \end{aligned}$$

$$\int_{\Gamma_S} w S d\Gamma = -\frac{1}{Re Pr U_c} \int_{\Gamma_S} w \frac{\partial T}{\partial t} d\Gamma \quad (13)$$

基礎方程式 (1), (2), (3) の空間方向の離散化に対して P1/P1(流速・圧力 1 次) 要素を用いた安定化有限要素法(SUPG/PSPG 法²⁾)を適用する。一方, 時間方向の離散化には 2 次精度である Crank-Nicolson 法を用いている。なお, 連続式, 圧力は陰的に取り扱っている。

3. 数値解析例

(1) 3 次元立方 Cavity 内自然対流問題

a) 解析条件

対象は非圧縮性粘性流体とし, 解析領域, 境界条件を図-1に示す。解析条件は $30 \times 30 \times 30$ の最小メッシュ幅 1.12×10^{-3} の不等分割メッシュ用い, $Ra = 1.0 \times 10^7$, $Pr = 0.71$ とし, 微少時間増分量は $\Delta t = 1.0 \times 10^{-6}$ とした。

KeyWords： 安定化有限要素法, 熱対流解析, 流出境界条件

連絡先： 〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27 E-mail: show@kc.chuo-u.ac.jp

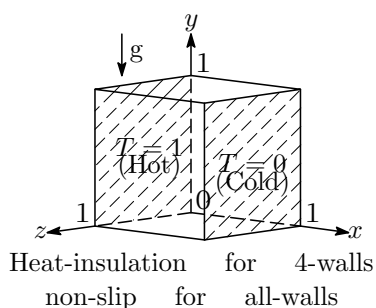


図-1 解析領域・境界条件

b) 解析結果

棚橋らの解析結果³⁾との定量的な比較を表-1に示す。

表-1中の U_{max} , V_{max} はそれぞれ $z = 0.5$ 断面でのCavityの中心軸 $x = 0.5, y = 0.5$ における速度の最大値を, x, y はそれぞれ速度の最大値の x, y の座標値を示す。 $Ra = 10^7$ のような高Rayleigh数でも棚橋らの解析結果³⁾と良好な一致を示すことが確認された。

表-1 $Ra=10^7$ における解析結果の比較

	ΔL_{min}	U_{max} y	V_{max} x
本解析	1.12×10^{-2} ($30 \times 30 \times 30$)	151.22 0.8854	707.84 0.0255
棚橋ら ³⁾	1.11×10^{-2} ($30 \times 30 \times 30$)	154.53 0.8792	709.77 0.00239

(2) 3次元平行平板間熱対流解析

a) 解析条件

対象は非圧縮性粘性流体とし、解析領域、境界条件を図-2に示し、 z 方向の側壁面に関しては周期境界条件を与えている。解析条件は $40 \times 20 \times 10$ 、最小メッシュ幅0.05の当分割メッシュを用い、各無次元数は $Re = 10, Gr = 1.5 \times 10^4, Pr = 0.667$ とし、微小時間増分量は $\Delta t = 1.0 \times 10^{-2}$ とした。初期条件は、流速および圧力を全領域で0、温度は下部壁面を除き0とした。また、流入流速は $u = 4y(1 - y), v = 0.0, w = 0.0$ で与え、流入壁面温度は $T = 1.0 - y$ とした。なお、運動方程式、エネルギー方程式共に本流出境界条件処理法を用いた場合の、流出境界上での節点の値と、解析領域を十分に長く取った場合の、同節点の値を参照解とし比較を行う。なお、参照解における流出境界条件は運動方程式にStress-free Condition、エネルギー方程式に断熱条件を与えている。また、伝播速度 U_c は流入流速の平均値を与えることとした。

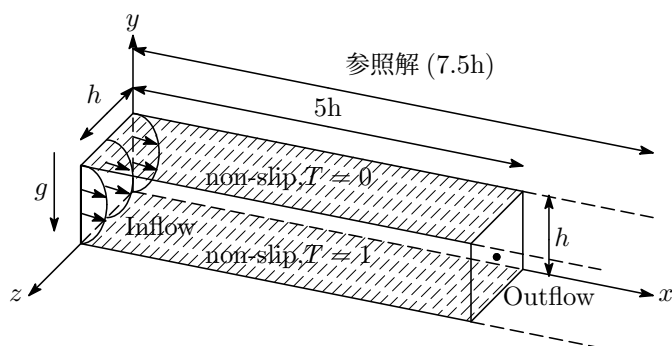
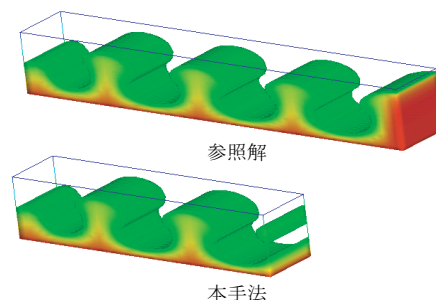
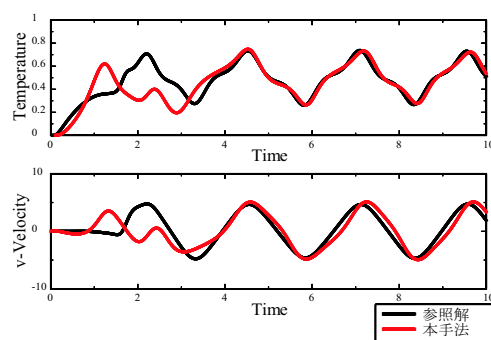


図-2 解析領域・境界条件

b) 解析結果

図-3に $t = 5.0$ における $T=0.5$ までの温度分布を示す。参照解の場合流出境界上で熱が滞留してしまい流出境界付近で流れが不自然になっている。しかし、本流出境界条件処理法の場合、流出境界付近では熱の滞留は見られず、自然な流れとなっている。

図-4は節点(5.0,0.5,0.5)における温度と流速成分 v の時間変化からも示したものである。図-4より本手法と参照解で多少の位相のずれと流速成分 v の過大評価はあるものの、自然な流れが表現されており本手法の有効性が示されている。

図-3 $t=5.0$ における $T=0.5$ までの温度分布図-4 節点(5.0,0.5,0.5)における温度と流速成分 v の時間変化

4. 結言

本報告では安定化有限要素法により、従来有限要素法解析で用いられてきた流出境界条件処理法と本流出境界条件処理法との比較検討を行い、以下の結論を得た。

- 3次元立方Cavity内自然対流問題により高Rayleigh数においても精度良く安定した解析値が得られ、本解析手法の有効性が確認できた。
- 本流出境界条件処理法を運動方程式、エネルギー方程式に適用することで、滑らかな流れの流出を実現することができた。

今後の課題として、乱流モデルの導入、実地形での解析などがあげられる。

参考文献

- 1) 中山司, 岩崎潤: 熱移動を伴う管内粘性流の有限要素法解析における流出境界条件に関する検討, 日本機械学会論文集(B編), 58巻554号(1992-10), pp.43-48
- 2) T.E.Tezduyar: Stabilized finite element formulations for incompressible flow computations, Advance in Applied Mechanics, 28, pp.1-44, 1992.
- 3) 槇原孝文, 三好市朗, 棚橋隆彦: CIP有限要素法を用いた立方キャビティ内自然対流解析, 日本機械学会論文集(B編), 66巻650号(2000-10), pp.2513-2520