一様熱流を受ける任意形状剛体介在物とクラックとの干渉問題(剛体回転を許容した場合)

日本総合研究所　　　　　　　　　齊藤　高広
名古屋工業大学　　正会員　　長谷部　宣男
名古屋工業大学　　正会員　　王　険峰

１．はじめに

一様熱流を受ける無限板中に任意形状剛体介在物とその近傍にクラックが存在する場合の相互作用について変位境界値問題として，介在物が回転しない場合の解は別に報告している(1)．剛体介在物モデルの問題では，剛体回転の有無により解が異なり，本論文では剛体回転を許容する問題の解析を行う．剛体回転を許容する問題は，介在物に一様熱流のみが作用し, 剛体介在物の回転しない場合(問題A_{I})と, 介在物に剛体回転のみが作用する場合(問題A_{II}）とを重ね合わせる必要がある(1,2)．問題A_{I}， A_{II}の原点回りの剛体介在物上の合モーメントを計算し，それらの和が 0 になるという条件を満足するように問題A_{I}， A_{II}の解を重ね合わせることで，求めたい問題A_{III}の解を得る．解析には，単位円外に写像する有理写像関数と複素応力関数，点熱源対のグリーン関数，Dislocation のグリーン関数を用いる．ここで，問題A_{I}の解は文献[1]で示しているので概略を述べる．A_{I}の解を以下の 3 つの問題に分けて考える(1)．

問題B_{I} :任意形状剛体介在物が存在する無限板の遠方で一様熱流が作用する場合.

問題C_{I} :同上の無限板に分布した熱源対が存在する場合.

問題D_{I} :同上の無限板に分布した Dislocation が存在する場合.

問題B_{I} , C_{I} , D_{I}を，クラック面の熱流及び外力境界条件を満足するように重ね合わせることで, 求めたい問題A_{I}の解析を行う.

さらに，問題A_{II}を以下の 2 つの問題に分けて考える(2).

問題B_{II} ：無限板に存在する任意形状剛体介在物が微小回転する場合.

問題C_{II} ：剛体介在物が存在する無限板に分布した Dislocation が存在する場合.

問題B_{II} , C_{II}を，クラック面の外力境界条件を満足するように重ね合わせることで，Dislocation の分布を求め，問題A_{II}の解析を行う.

原点回りの合モーメント，剛体回転量，クラックの応力拡大係数を求める．写像関数の係数を変えることで, 楕円介在物, 矩形介在物について解析を行い, 介在物のクラックの影響を考察する.

２．写像関数

解析には単位円外に写像する有理型写像関数$\omega(\zeta)$を用いる．形状に関するパラメーターを変えることで, 円形, 楕円形の解析を行うことができる.

３．解析方法

問題B_{I} , C_{I} , D_{I}に対応する複素応力関数$\phi_{\mathrm{B,C,D\,I}}$, $\psi_{\mathrm{B,C,D\,I}}$は文献[1]で，問題B_{II} , C_{II}に対応する複素応力関数$\phi_{\mathrm{B,C\,II}}$, $\psi_{\mathrm{B,C\,I}}$は文献[2]で報告されている.

一様熱流qの作用する問題A_{I}の原点回りの合モーメントを$qM_{\mathrm{A\,I}}$と表すと，それは次式の形に表すことができる.

$$qM_{\mathrm{A\,I}} = M_{\mathrm{B\,I}} + M_{\mathrm{C\,I}} + M_{\mathrm{D\,I}} \tag{1}$$

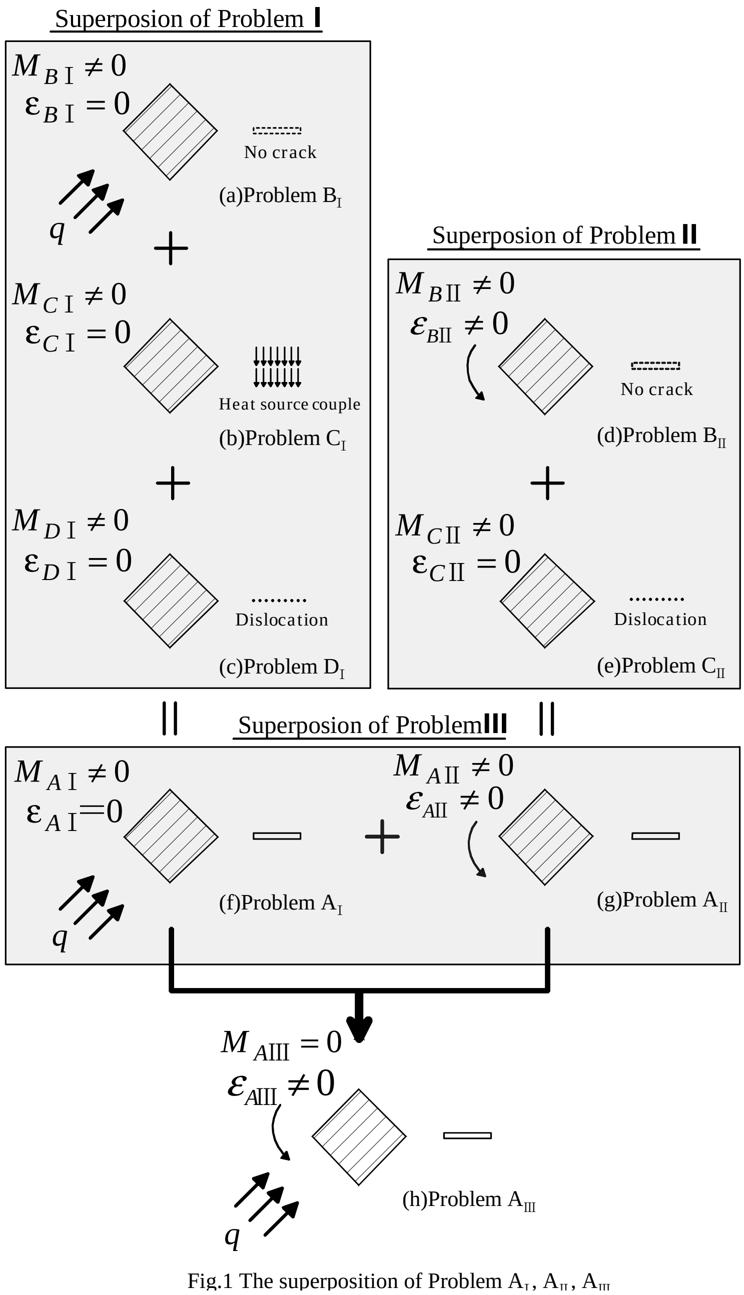

Fig.1 The superposition of Problem A_{I}, A_{II}, A_{III}

キーワード　変位境界値問題　一様熱流　剛体回転　応力拡大係数
連絡先 466-8555 名古屋市昭和区御器所町 名古屋工業大学 社会開発工学科 Tel. 052-735-5482

$$M_{\mathrm{C\,I}} = q\int_{-f}^{f}\gamma(t)M'_{\mathrm{C\,I}}dt\ ,\ M_{\mathrm{D\,I}} = q\int_{-f}^{f}D_{\mathrm{I}}(t)M'_{\mathrm{D\,I}}dt \qquad (2,3)$$

$\gamma(t)$ は問題 $\mathrm{C_I}$ の点熱源対の分布密度，D_{I} は問題 $\mathrm{D_I}$ の Dislocation 密度を表す． $M_{\mathrm{B\,I}}$, $M'_{\mathrm{C\,I}}$ ($q=1$ として), $M'_{\mathrm{D\,I}}$ （$q=1$ として)は次式で与えられる．

$$M_{B,\mathrm{CI}} = \mathrm{Re}\left[\kappa\oint\omega(\sigma)\bar{\phi}'_{B,C1}\left(\frac{1}{\sigma}\right)\frac{d\sigma}{\sigma^2} - \oint\bar{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)\phi'_{B,C1}(\sigma)d\sigma\right.$$
$$\left. + 2G\alpha'\oint\omega(\sigma)\bar{\omega}'\left(\frac{1}{\sigma}\right)\bar{\Psi}_{B,C1}\left(\frac{1}{\sigma}\right)\frac{d\sigma}{\sigma^2}\right] \qquad (3)$$

$$M'_{\mathrm{D\,I}} = \mathrm{Re}\left[\kappa\oint\omega(\sigma)\bar{\phi}'_{\mathrm{D1}}\left(\frac{1}{\sigma}\right)\frac{d\sigma}{\sigma^2} - \oint\bar{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)\phi'_{\mathrm{D1}}(\sigma)d\sigma\right] \qquad (4)$$

剛体回転 $\varepsilon_{\mathrm{A\,II}}$ の作用する問題 $\mathrm{A_{II}}$ の原点回りの合モーメントを $\varepsilon_{\mathrm{A\,II}}M_{\mathrm{A\,II}}$ と表すと，それは次式の形に表すことができる．

$$\varepsilon_{\mathrm{A\,II}}M_{\mathrm{A\,II}} = M_{\mathrm{B\,II}} + M_{\mathrm{C\,II}} \qquad (5)$$

$$M_{\mathrm{C\,II}} = \varepsilon_{\mathrm{A\,II}}\int_{-f}^{f}D_{\mathrm{II}}(t)M'_{\mathrm{C\,II}}dt \qquad (6)$$

D_{II} は問題 $\mathrm{C_{II}}$ の Dislocation の密度関数を表す． $M_{\mathrm{B\,II}}$, $M'_{\mathrm{C\,II}}$ ($\varepsilon_{\mathrm{A\,II}}=1$ として)は次式で与えられる． $\varepsilon_{\mathrm{A\,II}} = \varepsilon_{\mathrm{B\,II}}$ である．

$$M_{\mathrm{B\,II}} = \mathrm{Re}\left[\kappa\oint\omega(\sigma)\bar{\phi}'_{\mathrm{B\,II}}\left(\frac{1}{\sigma}\right)\frac{d\sigma}{\sigma^2} - \oint\bar{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)\phi'_{\mathrm{B\,II}}(\sigma)d\sigma\right.$$
$$\left. + 2G\varepsilon_{\mathrm{A\,II}}i\oint\omega(\sigma)\bar{\omega}'\left(\frac{1}{\sigma}\right)\frac{d\sigma}{\sigma^2}\right] \qquad (7)$$

$$M'_{\mathrm{C\,II}} = \mathrm{Re}\left[\kappa\oint\omega(\sigma)\bar{\phi}'_{\mathrm{C\,II}}\left(\frac{1}{\sigma}\right)\frac{d\sigma}{\sigma^2} - \oint\bar{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)\phi'_{\mathrm{C\,II}}(\sigma)d\sigma\right] \qquad (8)$$

問題 $\mathrm{A_{III}}$ の原点回りの合モーメント M_{AIII} は次式で求めることができる．

$$M_{\mathrm{AIII}} = qM_{\mathrm{A\,I}} + \varepsilon_{\mathrm{A\,II}}M_{\mathrm{A\,II}} \qquad (9)$$

問題 $\mathrm{A_{III}}$ において $M_{\mathrm{AIII}} = 0$ であるので，

$$qM_{\mathrm{A\,I}} + \varepsilon_{\mathrm{A\,II}}M_{\mathrm{A\,II}} = 0 \qquad \therefore \varepsilon_{\mathrm{A\,II}} = -\left(M_{\mathrm{A\,I}}/M_{\mathrm{A\,II}}\right)q \qquad (10)$$

図 1(f)～(g)より $\varepsilon_{\mathrm{A\,II}} = \varepsilon_{\mathrm{AIII}}$ である. 上式で得られた剛体回転量を用いて，問題 $\mathrm{A_{III}}$ におけるクラック A,B 点の無次元化された応力拡大係数 $F_{\mathrm{A,B(III)}}$ は次式で求めることができる．

$$F_{\mathrm{A,B(III)}} = qF_{\mathrm{A,B(I)}} + \varepsilon_{\mathrm{A\,II}}F_{\mathrm{A,B(II)}} \qquad (11)$$

ここで， $F_{\mathrm{A,B(I)}}$, $F_{\mathrm{A,B(II)}}$ はそれぞれ問題 $\mathrm{A_I}$， 問題 $\mathrm{A_{II}}$ におけるクラック A，B 点の無次元化された応力拡大係数である．

$$F_{\mathrm{A,B(III)}} = \frac{2k}{f\sqrt{\pi f}\,q\alpha' GR}K_{\mathrm{A,B(III)}} \qquad (12)$$

G はせん断弾性係数， α' , R はポアソン比 ν と線膨張係数 α により平面歪み状態では $\alpha' = (1+\nu)\alpha$, $R = (1+\nu)/(1-\nu)$， 平面応力状態では $\alpha' = \alpha$, $R = 1+\nu$ と与えられる．

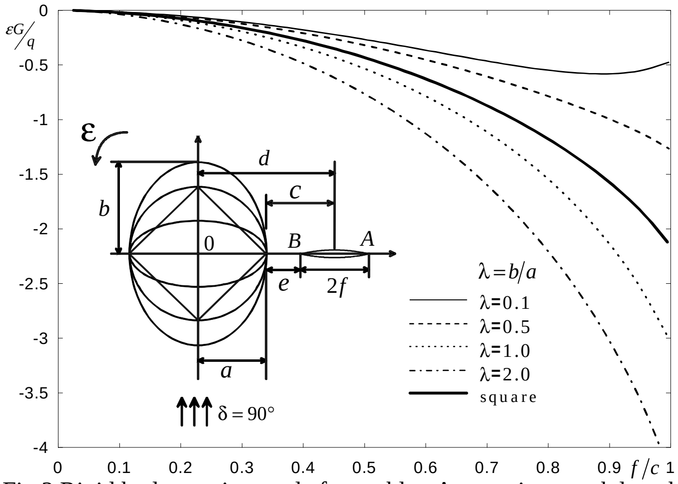

Fig.2 Rigid body rotation angle for problem$\mathrm{A_{III}}$ against crack length
(d/a=3.0, δ=90°, ν=0.3)

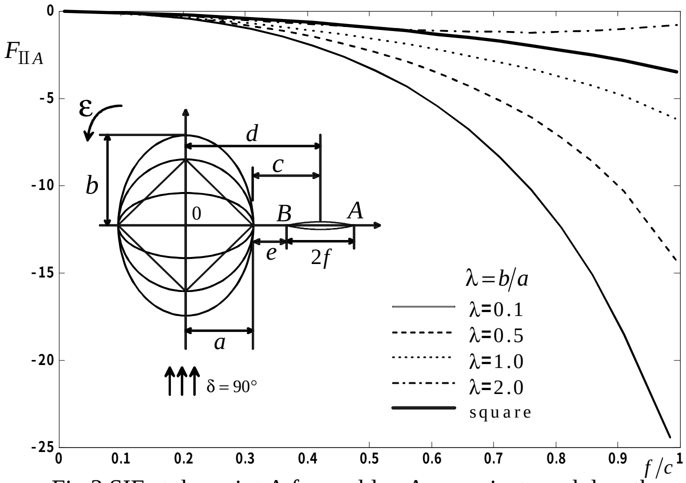

Fig.3 SIF at the point A for problem$\mathrm{A_{III}}$ against crack length
(d/a=3.0, δ=90°, ν=0.3)

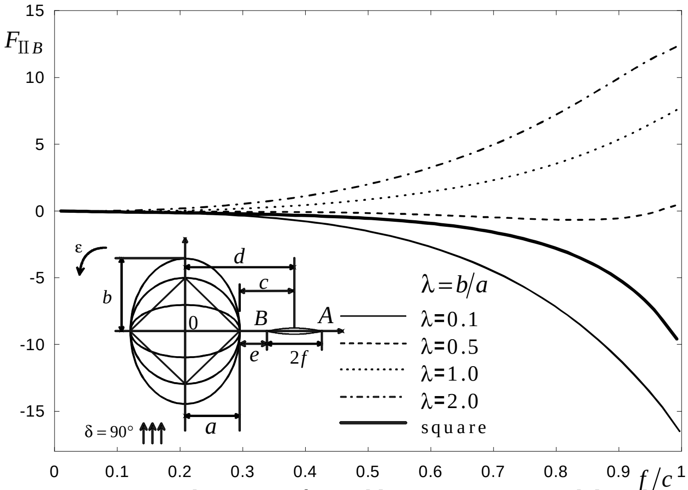

Fig.4 SIF at the point B for problem$\mathrm{A_{III}}$ against crack length
(d/a=3.0, δ=90°, ν=0.3)

4．まとめ

解析例として, 熱流向き $\delta = 90°$, $d/a = 3.0$ として, クラック長さ $f/c = 0$～1 と変化する場合を示す. 図 3 は問題 $\mathrm{A_{III}}$ における剛体回転量を示している．矩形の回転量は $\lambda = 0.5$ と $\lambda = 1.0$ (円形)の間にある．図 3,4 は問題 $\mathrm{A_{III}}$ におけるクラック A,B 点の応力拡大係数(式(12)の定義)を示す．A 点では形状によらず負の値を示すが，B 点では形状によって正の値，負の値いずれもとりうる．また，矩形の $F_{\mathrm{II\,B}}$ は $\lambda = 1.0$ と $\lambda = 2.0$ のそれら間にあり， $F_{\mathrm{II\,A}}$ は $\lambda = 0.1$ の挙動に近い．回転を拘束しない場合の応力拡大係数は，回転を拘束した場合[1]より大きい.

[文献](1)盛,長谷部,王：平成 15 年度土木学会年次学術講演会Ⅰ
(2)Yoshikawa,Hasebe：Archive of Applied Mechanics 69 (1999) pp.227-239