面内・面外荷重下における多層の層状楕円リング介在物を有する異方性弾性体の解析解

山梨大学大学院　学生会員　○種　健
群馬高専　非会員　黒瀬　雅詞
山梨大学大学院　正会員　平島　健一
松江高専　正会員　浜野　浩幹

１．緒言

クラック等の周辺に形成される Craze Zone を連続体力学により解析する試みがなされてきている．著者らは等方性や異方性の弾性体内部に存在する層状楕円リング介在物問題に対する解析解を提示しており[1], 異方性体の場合には Lekhnitskii の解析法を用いた．

この中では，設定された 3 つの複素解析関数に対して用いる 3 つの特性根が異なるように定式化が行なわれているが，一般の異方性材料では特性根 μ_k $(k=1,2,3)$ の順序の取り方によって結果が異なり，真の解の判別が難しいことが問題になっていた．

そこで，本研究では特性根と複素解析関数との対応関係が任意で差し支えない新しい定式化理論を提示するとともに，等方性の層状楕円リング介在物を有する異方性弾性体に著者らの新しく提案した解析理論を用いた場合の数値例を示す．

２．解析方法

図-1 のように，異方性体の弾性主軸に対して傾斜した座標系 (x,y,z) を考える．各層とも弾性体としていることから，モデルを各層に分解して解析することができる．解析にあたっては各領域に番号を付すものとし，媒体を 1， $(N-1)$ 層の共焦楕円リングを外側から $2,3,4,\cdots,N$ ，最も内側の楕円介在物を $N+1$ で表わす．

平面ひずみ状態を仮定すると，異方性弾性体の構成方程式は，次式で与えられる．

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{yz}\\ \gamma_{zx}\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\beta_{11}&\beta_{12}&\beta_{14}&\beta_{15}&\beta_{16}\\ \beta_{12}&\beta_{22}&\beta_{24}&\beta_{25}&\beta_{26}\\ \beta_{14}&\beta_{24}&\beta_{44}&\beta_{45}&\beta_{46}\\ \beta_{15}&\beta_{25}&\beta_{45}&\beta_{55}&\beta_{56}\\ \beta_{16}&\beta_{26}&\beta_{46}&\beta_{56}&\beta_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{yz}\\ \tau_{zx}\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}+\frac{1}{a_{33}}\begin{Bmatrix}a_{13}\\ a_{23}\\ a_{34}\\ a_{35}\\ a_{36}\end{Bmatrix}\varepsilon_z . \qquad \text{............(1)}$$

ここに， β_{ij} は弾性コンプライアンスである．

物体力を無視した場合の釣合方程式は次式となる．

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}=0,\ \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}=0,\ \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial y}=0. \qquad \text{...............(2)}$$

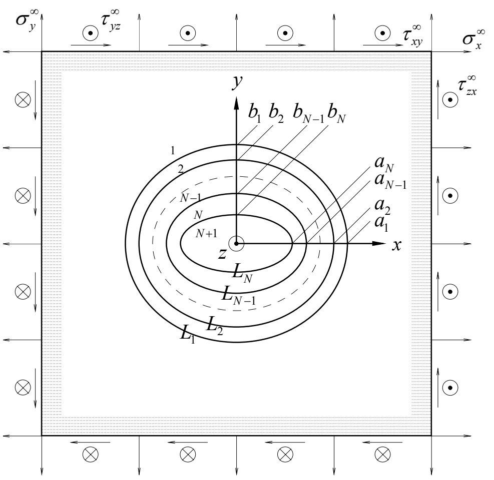

図-1　解析モデル

幾何学関係式は次式によって与えられる．

$$\left.\begin{aligned}&\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x},\ \gamma_{xy}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x},\ 2\omega_{xy}=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y},\\ &\varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y},\ \gamma_{yz}=\frac{\partial w}{\partial y},\ 2\omega_{yz}=\frac{\partial w}{\partial y},\\ &\varepsilon_z=\frac{\partial w}{\partial z},\ \gamma_{zx}=\frac{\partial w}{\partial x},\ 2\omega_{zx}=-\frac{\partial w}{\partial x}.\end{aligned}\right\} \qquad \text{............................(3)}$$

上式から導かれるひずみの適合条件を用いると，異方性弾性体の場の支配方程式は式(4)となる．

$$(L_4L_2-L_3^2)F=0,\ (L_4L_2-L_3^2)\psi=0. \qquad \text{......................................(4)}$$

式(4)の一般解は以下の形をとる．

$$F=2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3}F_k(z_k),\ \psi=2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3}\lambda_k F_k'(z_k). \qquad \text{................................(5)}$$

ここに， λ_3 は Lekhnitskii の与えた λ_3 の逆数である．

異方性弾性体の合応力，変位は次の複素解析関数：

$$\phi_k(z_k)=F_k'(z_k)\ \ (k=1,2,3). \qquad \text{..(6)}$$

を用いて次式で記述できる．

$$P_x=2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3}\mu_k\phi_k(z_k),\ P_y=-2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3}\phi_k(z_k),\ P_z=2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3}\lambda_k\phi_k(z_k). \qquad \text{..(7)}$$

$$u=2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3}\mu_k p_k\phi_k(z_k),\ v=2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3}q_k\phi_k(z_k),\ w=2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{3}r_k\phi_k(z_k). \qquad \text{..(8)}$$

キーワード　異方性，多層問題，順解析
連絡先　〒400-8511　山梨県甲府市武田4-3-11　山梨大学大学院工学研究科社会・情報システム工学専攻　TEL　055-220-8562

ここに，$\mu_k, \lambda_k, p_k, q_k$ および r_k は異方性体の弾性コンプライアンスより定まる複素定数である．以上で異方性弾性体に対する新しい定式化が完成したことになる．

つぎに，等方性弾性体に対する支配方程式は次式で与えられる．

$$\nabla^2\nabla^2\widetilde{F}=0,\ \nabla^2\widetilde{\psi}=0. \quad \cdots\cdots(9)$$

式(9)の一般解は次式で表わされる．

$$\widetilde{F}=\mathrm{Re}[\overline{\varpi}(\bar{\zeta})\phi(\zeta)+\psi(\zeta)],\ \widetilde{\psi}=\mathrm{Im}[\Omega(\zeta)]. \quad \cdots\cdots(10)$$

上式右辺の複素解析関数を用いれば，合応力，変位が以下のように求められる．

$$\left.\begin{aligned}&\pm P_x=\mathrm{Im}[\bar{\phi}(\bar{\zeta})+\overline{\varpi}(\bar{\zeta})\phi^{\mathrm{I}}(\zeta)+\psi^{\mathrm{I}}(\zeta)],\\&\pm P_y=\mathrm{Re}[\bar{\phi}(\bar{\zeta})+\overline{\varpi}(\bar{\zeta})\phi^{\mathrm{I}}(\zeta)+\psi^{\mathrm{I}}(\zeta)],\ \pm P_z=\mathrm{Im}[\Omega(\zeta)].\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(11)$$

$$\left.\begin{aligned}&2G\cdot u=\mathrm{Re}[\kappa\bar{\phi}(\bar{\zeta})-\overline{\varpi}(\bar{\zeta})\phi^{\mathrm{I}}(\zeta)-\psi^{\mathrm{I}}(\zeta)],\\&2G\cdot v=-\mathrm{Im}[\kappa\bar{\phi}(\bar{\zeta})-\overline{\varpi}(\bar{\zeta})\phi^{\mathrm{I}}(\zeta)-\psi^{\mathrm{I}}(\zeta)],\ G\cdot w=\mathrm{Re}[\Omega(\zeta)].\end{aligned}\right\} \quad .(12)$$

G は横弾性係数，κ はポアソン比で定まる定数である．

３．解析解の導出

図-1 の異方性弾性体（媒体）に対しては，一様応力場に次式の複素解析関数による結果を重ね合わせる．

$$\phi_k(z_k)=\frac{1}{\det A}\sum_{n=1}^{\infty}[A_{1k}\bar{a}_n+A_{2k}\bar{b}_n+A_{3k}\bar{c}_n]\zeta_k^{-n}\ \ (k=1,2,3). \quad \cdots\cdots(13)$$

リングに対する複素解析関数は式(14)で与えられる．

$$\left.\begin{aligned}&\phi^j(\zeta)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}A_n^j\zeta^n,\ \psi^j(\zeta)=K^j\ln\zeta+\sum_{n=-\infty}^{\infty}B_n^j\zeta^n,\\&\Omega^j(\zeta)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n^j\zeta^n.\end{aligned}\right\}\ (j=2,3,\cdots,N) \quad \cdots(14)$$

最も内側においては，さらに次式のように整理することができる．

$$\left.\begin{aligned}&\phi^{N+1}(\zeta)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n^{N+1}\left\{\zeta^n+\left(\frac{m}{\zeta}\right)^n\right\},\ \psi^{N+1}(\zeta)=\sum_{n=0}^{\infty}B_n^{N+1}\left\{\zeta^n+\left(\frac{m}{\zeta}\right)^n\right\},\\&\Omega^{N+1}(\zeta)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n^{N+1}\left\{\zeta^n+\left(\frac{m}{\zeta}\right)^n\right\}.\end{aligned}\right\} \quad (15)$$

ところで，図-1 の境界をいずれも完全結合と仮定すると境界条件は次式で与えられる．

$$\left.\begin{aligned}&P_x^j=-P_x^{j+1},\ P_y^j=-P_y^{j+1},\ P_z^j=-P_z^{j+1},\\&u^j=u^{j+1},\ v^j=v^{j+1},\ w^j=w^{j+1},\end{aligned}\right\}\ on\ L_j\ \ (J=1,2,\cdots,N). \quad \cdots(16)$$

異方性体（媒体），等方性体（リング介在物）の複素解析関数を式(7), (8)および式(11), (12)に順次適用し，これらを境界条件(16)に代入すれば，各々の複素解析関数の未定係数に関する無限連立一次方程式（永年方程式）が得られ，これを適切な処置を施して解くことにより所定の問題の解が求められる．

４．数値計算例

遠方での主応力 σ_y^∞ のみが作用する場合の $\tau_{\max}$ の等高線を図-2 に示す．左側が昨年報告した三層モデル[1)]，右側が本研究で解いた多層モデルの結果であり，両モデルにおける各層の Young 係数比は以下のように与えた．

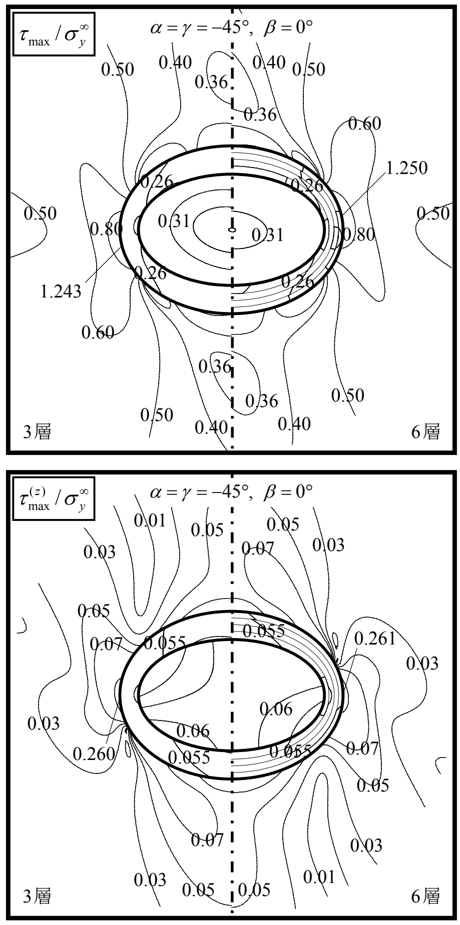

図-2　弾性主軸が任意傾斜した場合の $\tau_{\max}$ の等高線

媒　体：$e_{12}=E_{12}/E_{11}=0.20,\ e_{13}=E_{13}/E_{11}=1.00.$

リング：(3 層)　$e_j=E_j/E_{11}=0.10\ \ (j=2).$

(6 層)　$e_j=E_j/E_{11}=0.16-0.04\,(j-2)\ \ (j=2,3,4,5).$

介在物：$e_{N+1}=E_{N+1}/E_{11}=0.2\ \ (N=2\,or\,5).$

また，Poisson 比は各層ともに 0.30 と設定した．

3層あるいは6層で取り扱った場合で相違が確認できることから，より厳密な Craze Zone の解析等への応用が期待できる．

５．結言

異方性弾性体に対する従来までの定式化理論を修正するとともに，多層の楕円リング介在物を有する異方性弾性体に無限遠一様荷重が作用する場合の結果を示した．詳細については講演会当日に報告する．

参考文献

1) 種，黒瀬，平島，浜野：接着層および計測装置を有する三次元異方性岩盤の解析解，土木学会第 58 回年次学術講演会講演概要集, I-228, pp.455~456, 2003.9.