

面外せん断荷重下での多層楕円形介在物を有する異方性圧電弾性体の解析理論

山梨大学大学院 学生会員 ○佐々木 徹  
 山梨大学大学院 正会員 鈴木 拓雄  
 山梨大学大学院 正会員 平島 健一  
 群馬高専 正会員 木村 清和

1. 緒言

圧電材料は電気-力学変換デバイスとして有用な材料であり、センサーやアクチュエーターとして多方面にわたり利用されている。ここで、材料中に存在する孔や介在物ならびに異種材料間の接合界面では、局所的な応力集中が発生し、材料全体の強度低下や破壊に影響を及ぼす。したがって、孔や介在物周辺の力場および電場を定量的に把握することが重要となる。

そこで、本研究においては図1に示すように、奥行き方向に断面形状の変化のない異方性圧電弾性媒体内に、多層の物性値の異なる圧電弾性体で同一の共焦点を有する楕円形介在物が存在し、無限遠より面外方向に一樣な力学的負荷および面内方向に一樣な電氣的負荷が作用する問題の解析解を導き、いくつかの数値計算例を示す。筆者らは、同様な条件での等方性圧電媒体に関する解析を行っている<sup>(1)</sup>が、本研究では圧電材料は一般に異方性であるという背景を踏まえ発展させたものとなっている。

2. 解析手法

2.1 基礎関係式と基本解

本研究に関する基礎関係式として次の諸式が挙げられる。

・釣合式とガウスの法則：

$$\tau_{xz,x} + \tau_{yz,y} = 0, \quad D_{x,x} + D_{y,y} = 0. \dots\dots\dots (1)$$

・異方性圧電材料の構成式：

$$\left\{ \begin{matrix} \gamma_{yz}^n \\ \gamma_{xz}^n \end{matrix} \right\} = \begin{pmatrix} a_{44}^n & a_{45}^n \\ a_{45}^n & a_{55}^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau_{yz}^n \\ \tau_{xz}^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{41}^n & b_{42}^n \\ b_{51}^n & b_{52}^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_y^n \\ D_x^n \end{pmatrix}, \dots\dots\dots (2)$$

$$\left\{ \begin{matrix} E_y^n \\ E_x^n \end{matrix} \right\} = - \begin{pmatrix} b_{41}^n & b_{51}^n \\ b_{42}^n & b_{52}^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau_{yz}^n \\ \tau_{xz}^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{11}^n & c_{12}^n \\ c_{12}^n & c_{22}^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_y^n \\ D_x^n \end{pmatrix}.$$

ここに、 $a_{ij}$  は弾性コンプライアンス、 $b_{ij}$  および  $c_{ij}$  は、圧電定数および誘電率の逆数である。

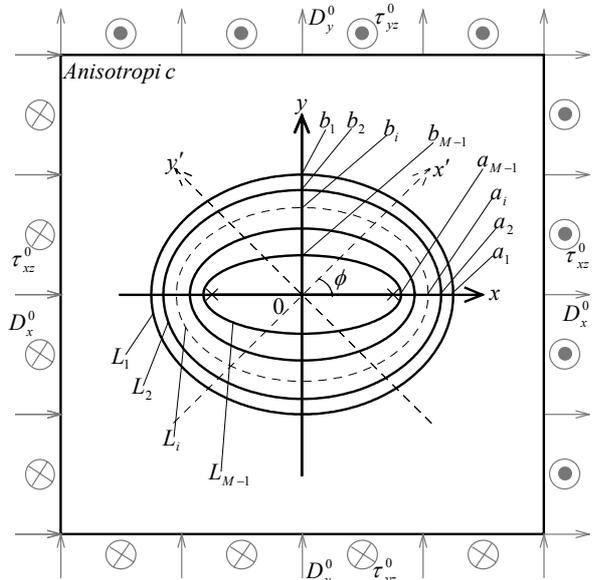


図1 面外力学的荷重および面内電氣的荷重下での多層楕円形介在物を有する異方性圧電弾性体

・ひずみ-変位関係式および電場-電気ポテンシャル関係式：

$$\gamma_{xz} = u_{z,x}, \quad \gamma_{yz} = u_{z,y}, \quad E_x = \phi_{,x}, \quad E_y = \phi_{,y}, \dots\dots\dots (3)$$

・ひずみと電場の適合条件式：

$$\gamma_{xz,y}^n - \gamma_{yz,x}^n = 0, \quad E_{x,y}^n - E_{y,x}^n = 0. \dots\dots\dots (4)$$

次に、異方性媒体に対する写像関数を以下のように設定する。

$$z_k = x + \mu_k y = \omega_k(\zeta_k) = R_0^*(\zeta_k + m^* / \zeta_k). \dots\dots\dots (4)$$

ここに、

$$R_0^* = (a_1 - i\mu_k b_1) / 2, \quad m^* = (a_1 + i\mu_k b_1) / (a_1 - i\mu_k b_1) \dots\dots (5)$$

以上に示した式を組み合わせることにより、場の支配方程式として次式が得られる。

$$\{L_1 L_3 - (L_2)^2\} U = 0. \dots\dots\dots (6)$$

ここに、 $L_1, L_2, L_3$  はそれぞれ2階の偏微分演算子である。

複素解析関数を用いると、式(6)の一般解は異方性媒体については以下に示す式(7)、多層介在物については式(8)となる。

キーワード 異方性、圧電材料、多層問題、楕円形介在物、面外力学的荷重

連絡先 〒400-8511 山梨県甲府市武田 4-3-11 山梨大学医学工学総合教育部博士課程機能材料システム工学専攻 Te1055-220-8532

$$\left. \begin{aligned} U(x, y) &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 U_k(z_k), \\ \Phi(x, y) &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \Phi_k(z_k) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \lambda_k U_k(z_k). \end{aligned} \right\} \text{ (7)}$$

[媒体]...

$$\left. \begin{aligned} U^i(x, y) &= \operatorname{Im}[U^i(\zeta)], \\ \Phi^i(x, y) &= \operatorname{Im}[\Phi^i(\zeta)] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots \text{ (8)}$$

[介在物]...

上式と基礎関係式より、応力および電気変位の式は次式で求められることになる。

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xz} &= \frac{\partial U}{\partial y} = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \mu_k U'_k(z_k), \\ \tau_{yz} &= -\frac{\partial U}{\partial x} = -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 U'_k(z_k). \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots \text{ (9)}$$

$$\left. \begin{aligned} D_x &= \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \mu_k \lambda_k U'_k(z_k), \\ D_y &= -\frac{\partial \Phi}{\partial x} = -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \lambda_k U'_k(z_k). \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots \text{ (10)}$$

**2.2 解析解の導出**

媒体および介在物の複素解析関数は次の形となる。

$$\left. \begin{aligned} U_1(z_1) &= \frac{-1}{\lambda_2 - \lambda_1} (\lambda_2 a_1 - b_1) \zeta_1^{-1}, \\ U_2(z_2) &= \frac{-1}{\lambda_2 - \lambda_1} (-\lambda_1 a_1 + b_1) \zeta_2^{-m}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots \text{ (11)}$$

[媒体]...

$$\left. \begin{aligned} U^i(\zeta) &= C_i^i \zeta + C_{-i}^i \zeta^{-1}, \\ \Phi^i(\zeta) &= D_i^i \zeta + D_{-i}^i \zeta^{-1}, \quad (i = 2, \dots, M-1). \end{aligned} \right\} \text{ (12)}$$

[介在物]...

$$\left. \begin{aligned} U^M(\zeta) &= C_1^M \{\zeta + m/\zeta\}, \\ \Phi^M(\zeta) &= D_1^M \{\zeta + m/\zeta\}. \end{aligned} \right\} \dots\dots \text{ (13)}$$

[最も内側の介在物]...

なお、媒体については一様場の結果を重ね合わせる必要がある。

次に、各々の境界を完全接合とすれば、境界条件は、①力学的変位、②合応力、③電気ポテンシャルおよび④合電気変位に対して次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \textcircled{1} u_z^n &= u_z^{n+1}, \textcircled{2} P_z^n = P_z^{n+1}, \textcircled{3} \varphi^n = \varphi^{n+1}, \textcircled{4} P_E^n = P_E^{n+1}, \\ &\text{on } L_n (n = 1, 2, \dots, M-1). \end{aligned} \right\} \text{ (14)}$$

媒体および介在物の複素関数を順次適用し、これらを式(14)に代入すれば、各々の複素関数の未定係数に関する  $8 \times (M-1)$  元連立一次方程式が得られ、これを解くことにより所期の問題の解が得られる。

**3. 数値計算例**

**3.1 異方性の影響**

図2は遠方場より一様な応力場と電気変位場が作用する場合の最大せん断応力の等高線図である。異方性の影響を見るために、左上に等方性、左下と右

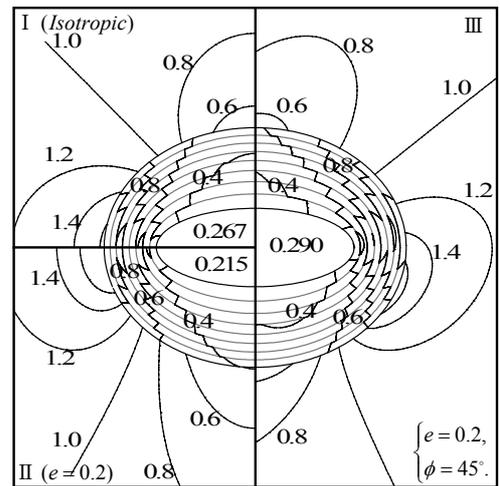


図2 異方性比  $e$  の変化による  $\tau_{\max}$  の等高線図

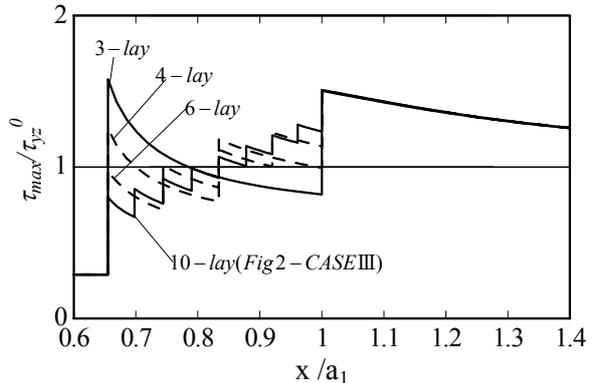


図3 層数の変化に伴う  $x$  軸上での  $\tau_{\max}$  の変化

半分は異方性の場合の結果を示しているが、有意な差が確認できる。

**3.2 層数を増加させた場合の各物理量の変化**

図3では圧電弾性媒体中の楕円形介在物の物性値が連続的に変化する場合を想定し、層数を変化させ数値計算を行ったものである。層数を増やすにしたがい、10-layerの解に漸近していく挙動が確認できる。

**4. 結言**

本研究では、遠方場での一様な面外力学的負荷および面内電氣的負荷が作用する多層楕円形圧電弾性介在物を有する異方性圧電弾性媒体に対する解析解の提示を行うと共に、いくつかの数値計算例を示した。ここで導かれた解析解は層数が数十ないし数百以上になっても計算可能であり、従来の結果に帰着するものとなっている。

なお、数値計算例の詳細な考察については講演会当日に発表するものとする。

**参考文献**

(1) 鈴木・佐々木・木村・平島：面外せん断荷重下での多層楕円形介在物を有する等方性圧電弾性体の解析理論，機論，69-688A(2003)，1695-1702.