任意の層数を有する等方性同心円状の複合断面棒のサンブナンのねじり問題の解析

山梨大学大学院　　非会員　　○種　　　将
山梨大学大学院　　正会員　　　平島　健一
山梨大学大学院　　正会員　　　鈴木　拓雄

１．緒言

構成要素間に薄く，せん断定数の小さい層(LS-type)，もしくは大きい層(HS-type)を有する複合断面棒のサンブナンのねじり問題に対し，半逆解法を用いた解析がなされてきている．Benveniste らは LS-type,HS-type の 3 層の同心円状の複合断面棒を取り上げ，中間層を界面として近似的にねじりモーメント作用断面近傍での応力，変位の擾乱を表す解を求めている．しかし，層数が数十，数百に及ぶような同心円状の複合断面棒のサンブナンのねじり問題の解析に関する文献はほとんど見られない．

そこで，本研究では Benveniste らの定式化に沿い，層数が数十，数百あるような複合断面棒のねじりモーメント作用断面近傍での応力，変位の擾乱を表す解を厳密に求めるとともに，Benveniste らの取扱った 3 層問題に本解析手法を用いた場合の数値例を示す．

２．解析方法

図-1 に示すように座標系は円柱座標系とし，座標系原点を棒断面中心にとる．層数を N，層番号を i として一番内側の層から $i=1, i=2, \cdots, i=N$ とする．

まず，サンブナンのねじり問題においてしばしば用いられる半逆解法によって，未知変位 $u_r^{(i)}, u_\theta^{(i)}, u_z^{(i)}$ のうち半径方向変位 $u_r^{(i)}$，棒軸方向変位 $u_z^{(i)}$ を円形断面の形状特性から次のように仮定する．

$$u_r^{(i)} = u_z^{(i)} = 0. \qquad \text{.......}(1)$$

ここで，剛体回転 $u_\theta^{(i)}$ は角度 θ に依存せず，r と z のみの関数と考え，次式のように設定する．

$$u_\theta^{(i)} = u_\theta^{(i)}(r, z). \qquad \text{.......}(2)$$

物体力を無視した場合の釣合方程式は次式となる．

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \sigma_r^{(i)}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{r\theta}^{(i)}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{zr}^{(i)}}{\partial z} + \frac{\sigma_r^{(i)} - \sigma_\theta^{(i)}}{r} = 0,\\
&\frac{\partial \tau_{r\theta}^{(i)}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_\theta^{(i)}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}^{(i)}}{\partial z} + 2\frac{\tau_{r\theta}^{(i)}}{r} = 0,\\
&\frac{\partial \tau_{zr}^{(i)}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{\theta z}^{(i)}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_z^{(i)}}{\partial z} = 0.
\end{aligned}\right\} \qquad \text{.......}(3)$$

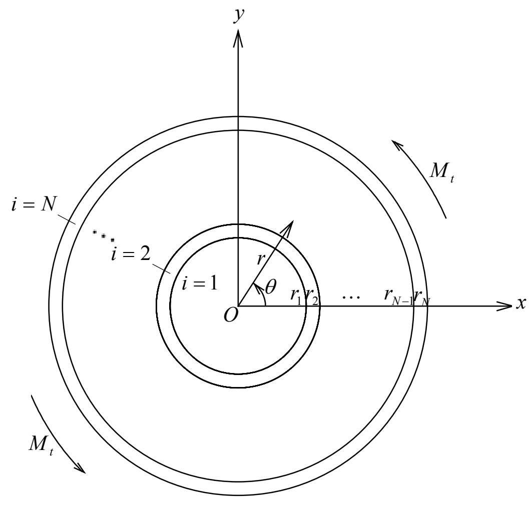

図-1　解析モデル

応力とひずみの関係は次式で与えられる．

$$\left.\begin{aligned}
&\sigma_r^{(i)} = 2G_i\left(\varepsilon_r^{(i)} + \frac{\nu_i}{1-2\nu_i}e^{(i)}\right), \quad \tau_{r\theta}^{(i)} = G_i\gamma_{r\theta}^{(i)},\\
&\sigma_\theta^{(i)} = 2G_i\left(\varepsilon_\theta^{(i)} + \frac{\nu_i}{1-2\nu_i}e^{(i)}\right), \quad \tau_{\theta z}^{(i)} = G_i\gamma_{\theta z}^{(i)},\\
&\sigma_z^{(i)} = 2G_i\left(\varepsilon_z^{(i)} + \frac{\nu_i}{1-2\nu_i}e^{(i)}\right), \quad \tau_{zr}^{(i)} = G_i\gamma_{zr}^{(i)}.
\end{aligned}\right\} \qquad \text{.......}(4)$$

ここに，

$$e^{(i)} = \varepsilon_r^{(i)} + \varepsilon_\theta^{(i)} + \varepsilon_z^{(i)}. \qquad \text{.......}(5)$$

幾何学関係式は次式によって与えられる．

$$\left.\begin{aligned}
&\varepsilon_r^{(i)} = \frac{\partial u_r^{(i)}}{\partial r}, \quad \varepsilon_\theta^{(i)} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta^{(i)}}{\partial \theta} + \frac{u_r^{(i)}}{r}, \quad \varepsilon_z^{(i)} = \frac{\partial u_z^{(i)}}{\partial z},\\
&\gamma_{r\theta}^{(i)} = \frac{\partial u_\theta^{(i)}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r^{(i)}}{\partial \theta} - \frac{u_\theta^{(i)}}{r}, \quad \gamma_{\theta z}^{(i)} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_z^{(i)}}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta^{(i)}}{\partial z},\\
&\gamma_{zr}^{(i)} = \frac{\partial u_z^{(i)}}{\partial r} + \frac{\partial u_r^{(i)}}{\partial z}.
\end{aligned}\right\} \qquad \text{.......}(6)$$

式(1),式(2)で予め設定した変位場を幾何学関係式(6)，構成方程式(4)，および釣合方程式(3)に代入することにより，同心円状の複合断面棒のサンブナンのねじり問題における支配方程式が次のように得られる．

$$\frac{\partial^2 u_\theta^{(i)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta^{(i)}}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_\theta^{(i)}}{\partial z^2} - \frac{u_\theta^{(i)}}{r^2} = 0. \qquad \text{.......}(7)$$

上式は変位の方程式（Navier の方程式）と呼ばれる．

キーワード　サンブナンねじり，半逆解法，複合断面棒
連絡先　〒400-8511　山梨県甲府市武田 4 丁目 3 番 11 号　山梨大学大学院医学工学総合教育部　TEL　055-220-8562

式(7)に変数分離法を適用し，剛体回転$u_\theta^{(i)}$はz方向に指数関数的に減少すると仮定する．すなわち，式(7)の解を次のようにおく．

$$u_\theta^{(i)}(r,z)=e^{-kz}V^{(i)}(r). \quad \text{………}(8)$$

式(8)を変位の方程式(7)に代入すると，次に示すベッセル型の支配方程式となる．

$$r^2\frac{d^2V^{(i)}}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dV^{(i)}}{dr}+\{(kr)^2-1\}V^{(i)}=0. \quad \text{………}(9)$$

したがって，変位場$u_\theta^{(i)}$は，一番内部の層が原点を含んでいることに注意して，ベッセル関数により次のように表される．

$$\left.\begin{aligned} u_\theta^{(i)}&=P_iJ_1(kr)e^{-kz} && (i=1),\\ u_\theta^{(i)}&=\{P_{2(i-1)}J_1(kr)+P_{2i-1}Y_1(kr)\}e^{-kz} && (i\neq 1).\end{aligned}\right\} \quad \text{………}(10)$$

ここに，$J_1(kr)$, $Y_1(kr)$はそれぞれ1次の第1種，第2種ベッセル関数，P_iは積分定数，kは波数を示すパラメーターである．さらに，構成方程式(4)，幾何学関係式(6)から得られる応力-変位関係式とベッセル関数の性質から応力場が次式によって求められる．

$$\left.\begin{aligned} \tau_{r\theta}^{(i)}&=-G_iP_ikJ_2(kr)e^{-kz} && (i=1),\\ \tau_{r\theta}^{(i)}&=-G_ik\{P_{2(i-1)}J_2(kr)+P_{2i-1}Y_2(kr)\}e^{-kz} && (i\neq 1),\\ \tau_{\theta z}^{(i)}&=-G_iP_ikJ_1(kr)e^{-kz} && (i=1),\\ \tau_{\theta z}^{(i)}&=-G_ik\{P_{2(i-1)}J_1(kr)+P_{2i-1}Y_1(kr)\}e^{-kz} && (i\neq 1).\end{aligned}\right\} \quad \text{………}(11)$$

ここに，$J_2(kr)$, $Y_2(kr)$はそれぞれ2次の第1種，第2種ベッセル関数である．

ところで，図-1 に示す棒の最も外側の表面は自由境界であり，各層間の変位と応力は連続であるという条件を設定すると，境界条件は次式で表される．

$$\left.\begin{aligned} &\tau_{r\theta}^{(N)}=0 && on\quad r=r_N,\\ &u_\theta^{(i)}=u_\theta^{(i+1)},\quad \tau_{r\theta}^{(i)}=\tau_{r\theta}^{(i+1)} && on\quad r=r_i\quad (i=1,2,\cdots,N-1).\end{aligned}\right\} \quad \text{………}(12)$$

変位場(10)，応力場(11)を境界条件式(12)に代入することで,ベッセル関数の未定係数P_iに関する同次の連立一次方程式をが得られ，それを満足するk, P_iを求めることにより解析解が求められる．

また，ベッセル関数が無限級数であるために境界条件式(12)を満足するkの値は無限個存在し，それにともなって未定係数P_iもそれぞれのkに対して定められる．したがって，最終的に変位場，応力場はすべてのkについて重ね合わせた形で次のように得られる．

$$\left.\begin{aligned} u_\theta^{(i)}&=\sum_{n=1}^{\infty}P_i^{(n)}J_1(k_nr)e^{-k_nz} && (i=1),\\ u_\theta^{(i)}&=\sum_{n=1}^{\infty}\{P_{2(i-1)}^{(n)}J_1(k_nr)+P_{2i-1}^{(n)}Y_1(k_nr)\}e^{-k_nz} && (i\neq 1).\end{aligned}\right\} \quad \text{………}(13)$$

$$\left.\begin{aligned} \tau_{r\theta}^{(i)}&=-G_i\sum_{n=1}^{\infty}P_i^{(n)}k_nJ_2(k_nr)e^{-k_nz} && (i=1),\\ \tau_{r\theta}^{(i)}&=-G_i\sum_{n=1}^{\infty}k_n\{P_{2(i-1)}^{(n)}J_2(k_nr)+P_{2i-1}^{(n)}Y_2(k_nr)\}e^{-k_nz} && (i\neq 1),\\ \tau_{\theta z}^{(i)}&=-G_i\sum_{n=1}^{\infty}P_i^{(n)}k_nJ_1(k_nr)e^{-k_nz} && (i=1),\\ \tau_{\theta z}^{(i)}&=-G_i\sum_{n=1}^{\infty}k_n\{P_{2(i-1)}^{(n)}J_1(k_nr)+P_{2i-1}^{(n)}Y_1(k_nr)\}e^{-k_nz} && (i\neq 1).\end{aligned}\right\} \quad \text{………}(14)$$

３．数値計算例

Benvenisteらの扱ったLS-typeの3層問題に本手法を適用し，波数を表すパラメーターk_1と，中間層の層厚とせん断定数から決まるパラメーターξとの関係を図-2に示す．

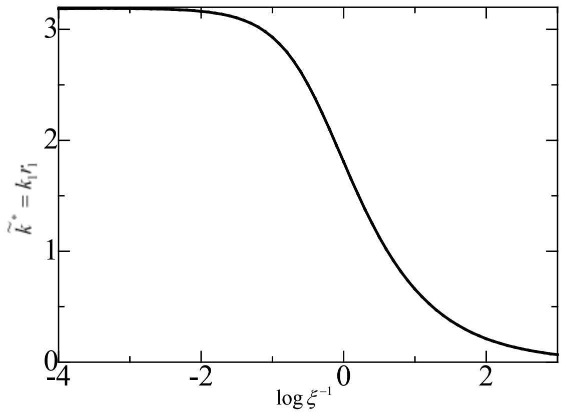

図-2　$\tilde{k}^*-\log\xi^{-1}$曲線

図-2 は本解析に用いたモデルにおいて最も内側の層のせん断定数比$\lambda_1=G_1/G_3=2.0$,最も外側の層の半径比$\alpha_3=r_3/r_1=1.5$,中間層の厚さ$t=0.001$とした状態で，中間層のせん断弾性定数G_2を変化させながらそのときのk_1の変化を表したものである.この結果がBenvenisteらの結果と一致したことから，k_nが精度よく求められていることが確認された．

こうして求めたk_nをもとに未定係数$P_i^{(n)}$を決定することで容易に応力分布，変位分布を得ることができる．

４．結言

今回は層数を3層としてBenvenisteらの結果と比較することにより，本解析法の妥当性を確認するにとどまった．今後は，本来の目的に合わせて層数を数十，数百とした場合で任意の層に弱層もしくは剛な層を含んでいる問題を取扱う．

講演会では3層のLS-typeの問題について本解析法を適用した例をより詳細にわたって報告する．

参考文献

1) Y.Benveniste,T.Chen:On the Saint-Venant torsion of composite bars with imperfect interfaces,Proc.R.Soc. Lond . A,Vol.457,pp.231~255,2001