

離散作用素積分境界要素法への高速多重極法の適用

福井大学大学院 学生会員 ○ 岡山 美央
福井大学大学院 正会員 福井 卓雄

1 はじめに

本研究は、Lubich[1] の離散作用素積分法 (Operational Quadrature Method) による波動問題の時間領域境界要素法への高速多重極法の適用を目的とする。

Lubich の離散作用素積分法とは、繰込み積分の近似値を離散化繰込み積分により計算し、一部の積分を差分解に置き換えることによって、重みを決定する方法である。Volterra 型の積分方程式を効率よく、かつ安定に解析することができる。この離散作用素積分法による波動問題の時間領域境界要素法についてはすでに著者らによって報告され、2次元波動問題において数値解析を行っている [2]。

ここでは、波動問題の離散作用素積分境界要素法について述べ、この方法への高速多重極法の適用について紹介する。

2 離散作用素積分境界要素法

2.1 波動問題の時間領域境界要素法

時間領域における波動問題を考える。外部領域を B 、境界を ∂B とする。初期条件 $u|_{t=0} = 0$ 、 $\partial u / \partial t|_{t=0} = 0$ を仮定する。境界値問題は

$$\begin{aligned} \nabla^2 u &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} & \text{in } B \\ u &= \hat{u} & \text{on } \partial B_1 \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= \hat{s} & \text{on } \partial B_2 \end{aligned} \quad (1)$$

となる。ここに、 ∇^2 は Laplace 作用素、 c は位相速度、 $\partial / \partial n$ は外向き法線微分を表す。

この問題の解 u は、時間領域境界積分方程式

$$\begin{aligned} C(\mathbf{x})u(\mathbf{x}, t) &= \tilde{u}(\mathbf{x}, t) + \int_{\partial B} G(\mathbf{x}; \mathbf{y}, t) * s(\mathbf{y}, t) dS_y \\ &\quad - \int_{\partial B} S(\mathbf{x}; \mathbf{y}, t) * u(\mathbf{y}, t) dS_y \end{aligned} \quad (2)$$

により表される。ここに、 C は点 $\mathbf{x}$ の位置に依存するパラメータで、 G 、 S は基本特異解および第二基本特異解である。 $\tilde{u}$ は入射波であり、初期条件を満足する。

2.2 離散作用素積分法の適用

離散作用素積分法を時間領域境界積分方程式 (2) に適用する。境界関数および離散化繰込み積分を (2) に代入すれば

$$\begin{aligned} C(\mathbf{x}_i) \sum_m \phi_m(\mathbf{x}_i) u_m(n\Delta t) \\ = \sum_j \sum_{k=0}^{n-1} A_j^{n-k}(\mathbf{x}_i) s_j(k\Delta t) - \sum_j \sum_{k=0}^{n-1} B_j^{n-k}(\mathbf{x}_i) u_j(k\Delta t) \end{aligned} \quad (3)$$

となる。ここに、影響関数 A_j^m 、 B_j^m は

$$\begin{aligned} A_j^m(\mathbf{x}) &= \frac{\rho^{-m}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \int_{\partial B} \hat{G}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, s_l) \phi_j(\mathbf{y}) e^{-2\pi i m l / L} dS_y(4) \\ B_j^m(\mathbf{x}) &= \frac{\rho^{-m}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \int_{\partial B} \hat{S}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, s_l) \phi_j(\mathbf{y}) e^{-2\pi i m l / L} dS_y(5) \end{aligned}$$

である。ここに、 $s_l = \delta(\zeta_l) / \Delta t$ とし、 $\delta(\zeta) = \sum_{j=0}^{\infty} \delta_j \zeta^j$ は利用する差分法 (線形マルチステップ法) の生成多項式の商である。また、 $\zeta_l = \rho e^{2\pi i l / L}$ である。 $\hat{G}$ 、 $\hat{S}$ はそれぞれ、基本特異解および第二基本特異解の Laplace 変換で、次のように与えられる。

$$\hat{G}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, s_l) = \frac{1}{2\pi} K_0 \left(\frac{s}{c} |x - y| \right) \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \hat{S}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, s_l) &= \frac{\partial \hat{G}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, s_l)}{\partial n_y} \\ &= -\frac{1}{2\pi} \frac{s}{c} \frac{\partial |x - y|}{\partial n_y} K_1 \left(\frac{s}{c} |x - y| \right) \end{aligned} \quad (7)$$

ここに、 K_n は第2種変形 Bessel 関数である。また、和の計算は FFT を用いれば高速に計算することができる。

以上によって、通常の離散化手法を用いる場合と同様に、時間領域境界要素法を構成することができる。

3 高速多重極法の適用

3.1 基本特異解の多重極展開

基本特異解 (6) は、 $\mathbf{x} - \mathbf{y}_0$ の極座標を (ρ, θ) 、 $\mathbf{y} - \mathbf{y}_0$ の極座標を (ρ, ϕ) とし、 $r > \rho$ のとき Graf の加法定理を用いて展開すると

$$\hat{G}(\mathbf{x}; \mathbf{y}, s_l) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} K_n \left(\frac{s}{c} r \right) I_n \left(\frac{s}{c} \rho \right) e^{in(\theta - \phi)} \quad (8)$$

キーワード：離散作用素積分境界要素法、高速多重極法、波動問題

連絡先：〒910-8507 福井市文京 3-9-1, TEL0776-27-8596, FAX0776-27-8746

ここに、 I_n は第1種変形 Bessel 関数である。この式より、多重極展開を

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} M_n K_n \left(\frac{s}{c} r \right) e^{in\theta} \quad (9)$$

で定義する。 M_n は多重極モーメントで、(8) より基本特異解 (6) の場合には

$$M_n^G = I_n \left(\frac{s}{c} \rho \right) e^{-in\phi} \quad (10)$$

となる。第2基本特異解の多重極モーメントは (7) より、 M_n^G の法線導関数をとれば

$$M_n^S = \left[\frac{s}{c} I_n' \left(\frac{s}{c} \rho \right) n_\rho - in \frac{I_n \left(\frac{s}{c} \rho \right)}{\rho} n_\phi \right] e^{-in\phi} \quad (11)$$

となる。ここに、 (n_ρ, n_ϕ) は単位法線ベクトル $\mathbf{n}$ の (ρ, ϕ) 座標成分である。

多重極展開 (9) の勾配の場合は次のようになる。

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{s}{2\pi c} \sum_{n=-\infty}^{\infty} M_n K_n' \left(\frac{s}{c} r \right) e^{in\theta} \quad (12)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{i}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} n M_n K_n \left(\frac{s}{c} r \right) e^{in\theta} \quad (13)$$

3.2 影響関数の多重極展開

基本特異解の多重極展開を (4), (5) に代入すれば、影響関数の多重極展開が得られる。

ここでは、境界を多角形で近似することとし、その上で境界値を一定と仮定する。すなわち、一定要素を考える。要素 E_j に対して、近似関数の基底は $f_i(E_j) = \delta_{ij}$ である。いま、要素長を l 、要素の水平軸からの傾きを ϕ とする。要素の中心に多重極点 $\mathbf{y}_0$ をとると、影響関数 A_i の多重極係数は、 $n > 0$ のとき

$$M_n^A = \begin{cases} 0 & n: \text{奇数} \\ \frac{2e^{-in\phi}}{s/c} \int_0^{\frac{sl}{2c}} I_n \left(\frac{s}{c} \rho \right) d \left(\frac{s}{c} \rho \right) & n: \text{偶数} \end{cases} \quad (14)$$

となる。 $n < 0$ の場合には、 $M_n^A = -M_{|n|}^A$ である。同様に、影響関数 B_i についても、 $(n_\rho, n_\phi) = (0, \pm 1)$ となることに注意すれば、(5) から、 $n > 0$ のとき

$$M_n^B = \begin{cases} 2ine^{-in\phi} \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{I_n \left(\frac{s}{c} \rho \right)}{\rho} d\rho & n: \text{奇数} \\ 0 & n: \text{偶数} \end{cases} \quad (15)$$

となる。 $n < 0$ のときは、 $M_n^B = -M_{|n|}^B$ である。これらの多重極係数は、いずれも変形 Bessel 関数の積分 $\int I_n(x) dx$ で表されている。

3.3 展開係数の変換

多重極点の移動 多重極展開 (9) を、別の位置の多重極について再度展開しなおすことができる。新しい多重極点か

ら見た古い多重極点の位置を (ρ, ϕ) として、Graf の加法定理を (9) に適用すれば、新しい係数 $\tilde{M}_n$ は、古い係数 M_n から

$$\tilde{M}_n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} M_m I_{n-m} \left(\frac{s}{c} \rho \right) e^{-i(n-m)\phi} \quad (16)$$

により得られる。

局所展開 波動場 $u(x)$ を点 $\mathbf{x}_0$ のまわりの局所展開

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} L_n I_n \left(\frac{s}{c} r \right) e^{-in\phi} \quad (17)$$

として表すことにする。ここに、 $r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|$ である。局所展開表現の勾配の場合は次のようになる。

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{s}{2\pi c} \sum_{n=-\infty}^{\infty} L_n I_n' \left(\frac{s}{c} r \right) e^{-in\theta} \quad (18)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} = -\frac{i}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} n L_n I_n \left(\frac{s}{c} r \right) e^{-in\theta} \quad (19)$$

局所展開点 $\mathbf{x}_0$ から見た多重極点 $\mathbf{y}_0$ の位置を (ρ, ϕ) として、多重極展開 (9) に Graf の加法定理を再度適用し、 $I_n \left(\frac{s}{c} r \right) e^{-in\theta}$ について整理すると、多重極展開係数 M_n から局所展開係数 L_n への変換関係

$$L_n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m M_m K_{m+n} \left(\frac{s}{c} \rho \right) e^{i(m+n)\theta} \quad (20)$$

が得られる。

局所展開点の移動 局所展開の収束半径内に新しい展開点を設け、新しい展開点から見た古い展開点の位置を (ρ, ϕ) とする。Graf の加法定理を (17) に適用すれば、新しい展開係数 $\tilde{L}_n$ と古い係数 L_n との変換関係は

$$\tilde{L}_n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^{m-n} L_m I_{m-n} \left(\frac{s}{c} \rho \right) e^{-i(m-n)\theta} \quad (21)$$

となる。

以上の係数変換式 (16), (20), (21) において、多重極展開を有限項 $\pm p$ で打ち切った場合には、無限和を有限和 $\sum_{-p}^p$ で置き換えて評価する。

4 おわりに

離散作用素積分境界要素法へ高速多重極法を適用するため、多重極展開を行った。これで、高速多重極法を用いた数値解析を行う準備は整った。

参考文献

- [1] C. Lubich : Convolution quadrature and discretized operational calculus I, *Mumer. Math.*, **52**, pp. 129–145, 1988.
- [2] 岡山美央, 福井卓雄 : 離散作用素積分法を利用した時間領域境界要素法の解析, 第 56 回年次学術講演会講演概要集, pp. 491, 2003.