2次元異方性静弾性問題における高速多重極境界要素法

福井大学大学院　学生会員　○　小林 孝彰
福井大学大学院　学生会員　　王　徳法
福井大学大学院　正会員　　　福井 卓雄

1　はじめに

本研究では、2 次元直交異方性体の静弾性問題における高速多重極境界要素法の定式化を行う。前提として、境界要素法を用いて解析を行う場合、離散化によって導かれる線形代数方程式の係数が密行列になることがあげられる。これを直接的な解法で求める場合、記憶容量 · 計算量ともに極めて大きなものになり、解析の実行を困難にしてしまう。これを回避する方法として高速多重極法を境界要素法に適用する。ここでは、異方性弾性問題の Airy の応力関数について整理したものを、基本解の複素関数表現を与えて、多重極展開および局所展開に関する関係式を導いた。また求まったものより影響関数の多重極展開を導いた。

2　直交異方性弾性体の 2 次元理論

(1)　基礎式

直交異方性弾性体の 2 次元静的問題において、ひずみ–変位関係は

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right) \tag{1}$$

つり合い方程式は

$$\sigma_{ij,j} + X_i = 0 \tag{2}$$

ひずみ-応力関係は

$$\epsilon_{ij} = s_{ij}^{kl}\sigma_{kl} \qquad \begin{pmatrix} s_{11}^{11} & s_{11}^{22} & 0 \\ s_{22}^{11} & s_{22}^{22} & 0 \\ 0 & 0 & s_{12}^{12} \end{pmatrix} \tag{3}$$

となる。ここに、u_i は変位、ϵ_{ij} はひずみ、σ_{ij} は応力、X_i は物体力、s_{ij}^{kl} は弾性係数テンソルの逆である。

(2)　Airy の応力関数の複素表現 [1]

本問題において、Airy の応力関数 ψ は方程式

$$S_{11}^{22}\frac{\partial^4\psi}{\partial z^4} - 4S_{11}^{12}\frac{\partial^4\psi}{\partial z^3\partial\bar{z}} + 2(S_{11}^{11} + 2S_{12}^{12})\frac{\partial^4\psi}{\partial z^2\partial\bar{z}^2} - 4S_{12}^{11}\frac{\partial^4\psi}{\partial z\partial\bar{z}^3} + S_{22}^{11}\frac{\partial^4\psi}{\partial\bar{z}^4} = 0 \tag{4}$$

を満足する。ここに、$z = x_1 + ix_2$ であり、S_{ij}^{kl} は次で与えられる。

$$S_{11}^{11} = \frac{1}{4}\left(s_{11}^{11} + s_{22}^{22} + 4s_{12}^{12} - 2s_{22}^{11}\right)$$

$$S_{11}^{22} = S_{22}^{11} = \frac{1}{4}\left(s_{11}^{11} + s_{22}^{22} - 4s_{12}^{12} - 2s_{22}^{11}\right)$$

$$S_{11}^{12} = S_{12}^{11} = \frac{1}{4}\left(s_{11}^{11} - s_{22}^{22}\right)$$

$$S_{12}^{12} = \frac{1}{4}\left(s_{11}^{11} + s_{22}^{22} + 2s_{22}^{11}\right)$$

方程式 (4) の一般解は、(4) の特性方程式の根のうちの 2 根 γ_1、γ_2 に対し、$z_\alpha = z + \gamma_\alpha\bar{z}$ $(\alpha = 1, 2)$ とすると、

$$\psi(z) = \phi(z_1) + \bar{\phi}(\bar{z}_1) + \chi(z_2) + \bar{\chi}(\bar{z}_2) \tag{5}$$

で与えられる。ここに、ϕ、χ は任意の解析関数である。特性根 γ_1、γ_2 は方程式

$$s_{22}^{22}\alpha^4 - 2(s_{22}^{11} + 2s_{12}^{12})\alpha^2 + s_{11}^{11} = 0 \tag{6}$$

の 2 根を α_1、α_2 とすると

$$\gamma_\lambda = \frac{\alpha_\lambda - 1}{\alpha_\lambda + 1}, \quad \alpha_\lambda = \frac{1 + \gamma_\lambda}{1 - \gamma_\lambda} \quad (\lambda = 1, 2) \tag{7}$$

で与えられる。式 (5) を用いて、変位および応力は次の式で与えられる。

$$\begin{aligned} D &= u_1 + iu_2 \\ &= \delta_1\phi'(z_1) + \rho_1\bar{\phi}'(\bar{z}_1) + \delta_2\chi'(z_2) + \rho_2\bar{\chi}'(\bar{z}_2) \\ \Phi &= \sigma_{11} - \sigma_{22} + 2i\sigma_{12} \\ &= -4\gamma_1^2\phi''(z_1) - 4\bar{\phi}''(\bar{z}_1) - 4\gamma_2^2\chi''(z_2) - 4\bar{\chi}''(\bar{z}_2) \\ \Theta &= \sigma_{11} + \sigma_{22} \\ &= 4\gamma_1\phi''(z_1) + 4\bar{\gamma}_1\bar{\phi}''(\bar{z}_1) + 4\gamma_2\chi''(z_2) + 4\bar{\gamma}_2\bar{\chi}''(\bar{z}_2) \end{aligned} \tag{8}$$

ここに、δ_α、ρ_α は $\beta_\lambda = s_{22}^{11} - s_{22}^{22}\alpha_\lambda^2$ $(\lambda = 1, 2)$ とするとき、以下のように定義する。

$$\begin{aligned} \delta_1 &= (1 + \gamma_1)\beta_2 - (1 - \gamma_1)\beta_1 \\ \delta_2 &= (1 + \gamma_2)\beta_1 - (1 - \gamma_2)\beta_2 \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_1 &= (1 + \gamma_1)\beta_2 + (1 - \gamma_1)\beta_1 \\ \bar{\rho}_2 &= (1 + \gamma_2)\beta_1 + (1 - \gamma_2)\beta_2 \end{aligned} \tag{10}$$

3　境界要素法

(1)　境界積分方程式

この問題の解は、Somigliana の公式

$$C_{ij}u_j(\boldsymbol{x}) = \int_{\partial B} G_{ij}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})T_{jk}^{y}u_k(\boldsymbol{y})\,ds_y - \int_{\partial B} S_{ij}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})u_i(\boldsymbol{y})\,ds_y \tag{11}$$

キーワード：複素表現, 境界要素法, 高速多重極法
連絡先 ： 福井大学 〒 910-8507 福井市文京 3-9-1 TEL0776-27-8596 FAX0776-27-8746

において、点 $\boldsymbol{x}$ を境界に近づけた式を未知境界値についての積分方程式として解くことにより得られる。ここに、C_{ij} は自由項、$T_{ij}^n u_j = \sigma_{ij}[u_k]n_j$ は境界応力である。また、G_{ij}、S_{ij} はそれぞれ基本解および二重層核である。

(2) 基本解および二重層核

基本解および二重層核は、それぞれ、単位集中力 P による変位および単位くい違い U による変位により与えられる。これらの複素関数表現は

$$\phi^G(z_1) = \frac{Q}{2\pi} z_1 \log z_1, \quad \chi^G(z_2) = \frac{R}{2\pi} z_2 \log z_2 \quad (12)$$

$$\phi^S(z_1) = \frac{V}{2\pi} \log z_1, \quad \chi^S(z_2) = \frac{W}{2\pi} \log z_2 \quad (13)$$

によって与えられる。ここに、係数 Q、R および V、W は、それぞれ、P と U とにより次のように与えられる。

$$Q = \frac{(1+\alpha_1)}{8(1+\gamma_1)(\alpha_1^2-\alpha_2^2)s_{22}^{22}} \left(\bar{\rho}_1 P + \delta_1 \bar{P}\right)$$

$$R = \frac{-(1+\alpha_2)}{8(1+\gamma_2)(\alpha_1^2-\alpha_2^2)s_{22}^{22}} \left(\bar{\rho}_2 P + \delta_2 \bar{P}\right)$$

$$V = \frac{(1+\alpha_1)}{8(1+\gamma_1)(\alpha_1^2-\alpha_2^2)s_{22}^{22}} \left(n - \gamma_1 \bar{n}\right)\left(U - \gamma_1 \bar{U}\right)$$

$$W = \frac{-(1+\alpha_2)}{8(1+\gamma_2)(\alpha_1^2-\alpha_2^2)s_{22}^{22}} \left(n - \gamma_2 \bar{n}\right)\left(U - \gamma_2 \bar{U}\right)$$

4 高速多重極法

(1) 多重極展開・局所展開

基本解 (12) の多重極展開を考慮すると、複素ポテンシャル ϕ、χ の多重極展開は

$$\phi(z_1) = M_{-1} z_1 \log z_1 - M_0 \log z_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M_n}{z_1^n} + C_1$$

$$\chi(z_2) = N_{-1} z_2 \log z_2 - N_0 \log z_2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{N_n}{z_2^n} + C_2 \quad (14)$$

となる。C_1、C_2 は変位および応力に無関係な定数である。局所展開を、ポテンシャル問題の場合と同様に、

$$\phi(z_1) = \sum_{n=1}^{\infty} K_n z_1^n, \qquad \chi(z_2) = \sum_{n=1}^{\infty} L_n z_2^n \quad (15)$$

とおくと、移動公式 M2M、M2L、L2L は多重極モーメント M_n および局所展開係数 K_n について

$$M'_{-1} = M_{-1}, \qquad M'_0 = a_1 M_{-1} + M_0$$

$$M'_n = \frac{a_1^{n+1}}{n(n+1)} M_{-1} + \frac{a_1^n}{n} M_0 + \sum_{m=1}^{n} \binom{n-1}{m-1} a_1^{n-m} M_m \quad (16)$$

$$K_1 = (\log a_1 + 1) M_{-1} - \frac{M_0}{a_1} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m M_m}{a_1^{m+1}}$$

$$K_n = \frac{(-1)^n}{a_1^n} \left[\frac{a_1 M_{-1}}{n(n-1)} + \frac{M_0}{n} + \sum_{m=1}^{\infty} \binom{n+m-1}{m-1} \frac{M_m}{a_1^m} \right] \quad (17)$$

$$K'_n = \sum_{m=n}^{\infty} \binom{m}{n} a_1^{m-n} K_m \quad (18)$$

となる。ここに、移動ベクトル a に対して $a_1 = a + \gamma_1 \bar{a}$ と定義する。N_n、L_n についても a_1 を $a_2 = a + \gamma_2 \bar{a}$ に替えれば同じ関係式が得られる。

(2) 影響関数の多重極展開

境界を N 分割の多角形で近似し、各要素の境界値が一定の場合を考える。境界積分方程式は影響関数

$$A_{ij}(x) = \int_{\partial B_E} G_{ij}(x,y) ds_y$$

$$B_{ij}(x) = \int_{\partial B_E} S_{ij}(x,y) ds_y \quad (19)$$

を用いることで式 (14) は

$$C_{ij} u_j(x) = \sum_{E=1}^{N} A_{ij}(x) T_{jk}^y u_k - \sum_{E=1}^{N} B_{ij}(x) u_i \quad (20)$$

と近似して表される。多重極展開式と式 (20) を用い、$a_\alpha (\alpha = 1, 2)$ について積分することで、影響関数の多重極表現を得る。ここで a_α は係数である M_n, N_n 内にのみ表れるので、係数を要素上で直接積分することで影響関数の多重極係数がえられる。また線素を ds とすることで、多重極係数 $\tilde{M}_n$ は

$$\tilde{M}_n = \int_{\partial B_E} M_n(a_1) ds_y = \int_{\partial B_E} M_n(a_1) \frac{ds}{da_1} da_1 \quad (21)$$

によって求まる。要素が直線区間 $[-z_e, z_e]$ であるとすると、線素は

$$ds = \frac{|z_e|}{z_e + \gamma_1 \bar{z}_e} da_1 \quad (22)$$

となる。これを用いて、基本解の多重極係数について積分を行うと以下のように求まる。

$$\tilde{M}_{-1} = \frac{Q|z_e|}{\pi}, \quad \tilde{M}_0 = 0$$

$$\tilde{M}_n = \begin{cases} \frac{Q|z_e|(z_e + \gamma_1 \bar{z}_e)^{n+1}}{\pi n(n+1)(n+2)} & (n: \text{奇数}) \\ 0 & (n: \text{偶数}) \end{cases} \quad (23)$$

ここで $\tilde{N}_n$ は a_2 に置き換えて同様に求めることができる。

5 おわりに

本研究では高速多重極境界要素法を構成するための準備、定式化を行った。計算手順は等方性の場合 [2] と大差はないものの、z の代わりに z_1、z_2 を使うことが異なっている。これによって基本解の影響が大きな方向が 2 つあることになるため、それを配慮した計算が必要となる。

参考文献

[1] Green, A.E. and W. Zerna : *Theoretical Elasticity*, 2nd ed. Oxford, 1968.
[2] 福井卓雄, 持田哲郎：高速多重極境界要素法の 2 次元静弾性問題への応用, 境界要素法論文集, **13**, pp. 131–136, 1996.