境界要素法における境界上の数値解のスムージング手法

福井大学大学院　学生会員　○　浦　　勝一
福井大学大学院　正会員　　　　福井 卓雄

1　はじめに

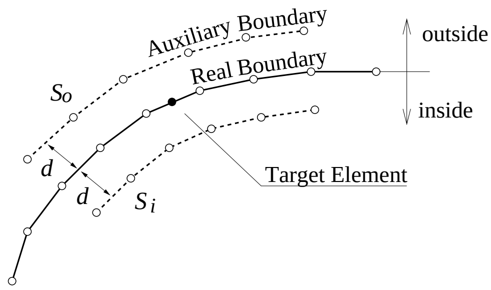
境界要素解析において一定要素を用いる解析は、高次要素を用いる場合に比べて、離散化モデルが作成しやすく、計算量が少ない。大規模問題の解析を行う場合、離散化モデルの作成の容易さは重要でありこの点で一定要素を用いる解析は有利であるといえよう。しかし、欠点もある。たとえば境界周辺において二重層ポテンシャルの特異性の影響により、境界上の解の接線方向勾配や要素境界付近の数値解の精度が悪くなり、要素分割を細かくしてもその精度は改善されない。

ここでは、一定要素の利点を生かしつつ、要素分割数に応じた精度の解を得る手法として層ポテンシャル法を用いた解のスムージング法を提案する。このような手法は、とくに、不定形要素を用いる 3 次元問題において境界上の任意の点の境界値を求める場合に必要となるが、ここでは 2 次元ポテンシャル問題を対象として簡単な例をあげて手法とその効果について論じる。

2　スムージングの方法

先に述べたような欠点はあるものの、一定要素を用いる解析において、クラック問題などの特殊な問題および境界の隅角周辺を除けば、境界値そのものは十分な精度をもつ。したがって、境界要素法により得られたデータをもとにして、領域境界上の数値解をスムージングを行う。

図-1 に示すようにスムージングを行いたい境界周辺に補助的な境界となる仮想境界を配する。仮想境界は真の境界を挟んで領域の内部側と外部側に配し、それぞれ S_i と S_o であらわしている。仮想境界の範囲はターゲット要素を中心にそれぞれ $(2m+1)$ 要素分とした。また、真の境界と仮想境界との間隔 (仮想境界間隔) を d としている。



図–1　境界付近の仮想境界

このように配した仮想境界 S_i、S_o それぞれにおける各要素に一重層密度 ϕ_i、ϕ_o を配しソレノイドの場

$$u(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=1}^{2m+1} \phi_i(k) \int_{\partial S_i(k)} G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,ds_y + \sum_{k=1}^{2m+1} \phi_o(k) \int_{\partial S_o(k)} G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,ds_y \quad (1)$$

を作成してスムージングを行う。ここで G は基本解である。

上式の ϕ_i、ϕ_o を決定するために、境界要素法によって得た境界上の境界値 u およびその法線方向勾配 $\partial u/\partial n$ をもちいる。仮想境界を配した範囲における真の境界の要素数は $(2m+1)$。この各要素それぞれにおいて u、$\partial u/\partial n$ の値が得られるので $2(2m+1)$ 個の条件

$$u(\boldsymbol{x_k}) = \sum_{l=1}^{2m+1} \phi_i(l) \int_{\partial S_i(l)} G(\boldsymbol{x_k},\boldsymbol{y})\,ds_y + \sum_{l=1}^{2m+1} \phi_o(l) \int_{\partial S_o(l)} G(\boldsymbol{x_k},\boldsymbol{y})\,ds_y \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(\boldsymbol{x_k}) = \sum_{l=1}^{2m+1} \phi_i(l) \int_{\partial S_i(l)} \frac{\partial G}{\partial n_x}(\boldsymbol{x_k},\boldsymbol{y})\,ds_y + \sum_{l=1}^{2m+1} \phi_o(l) \int_{\partial S_o(l)} \frac{\partial G}{\partial n_x}(\boldsymbol{x_k},\boldsymbol{y})\,ds_y \quad (3)$$

を考えることができる。この方程式の解くことにより ϕ_i、ϕ_o が決定され、ソレノイドの場 (1) が完成する。この場は境界値を満足し、かつ、なめらかな場となるはずである。また、得られる数値解の精度は境界要素法によって得た境界値の精度に見合ったものになることが期待できる。

キーワード：境界要素法 層ポテンシャル法 スムージング
連絡先：福井大学 〒 910-8507 福井市文京 3-9-1 TEL:0776-27-8596 FAX:0776-27-8746

3　計算例

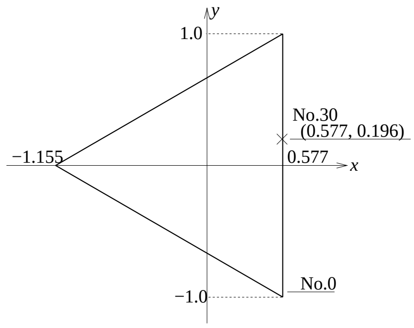
St Venant ねじり問題をゆがみ関数により解析し、境界上の接線方向応力 τ_s を求めて正解と比較した。

図-2 に示すように一辺が 2、ねじれ剛性が 1 の正三角柱断面に座標を割り当て、境界を 153 等分したものを境界要素とする。この正三角柱の両端に反時計回りに軸方向単位長さあたりのねじれ角が 1 となるようなのトルクを与えた場合の計算を以下に示す。

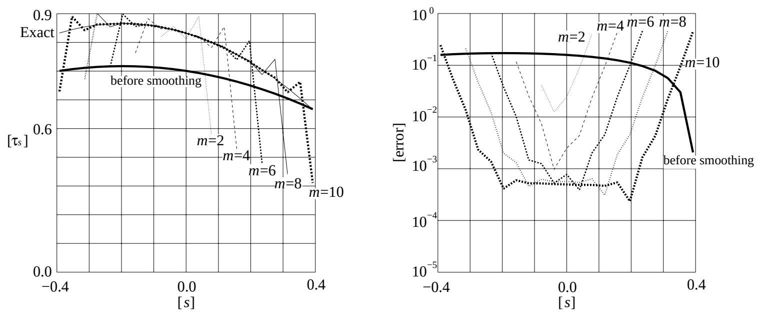
ターゲット要素を図に示す No.30$(x, y) = (0.577, 0.196)$ の要素とし、ターゲット要素から片側 m 個分の要素上に仮想境界を配する。仮想境界と真の境界との距離を d とするが、この値には要素長 Δs の 0.5 倍を与える。

計算結果の一例を図-3 に示し、スムージング前の解と比較する。スムージング前の解を太実線で、スムージング後の解を点線、破線で示した。

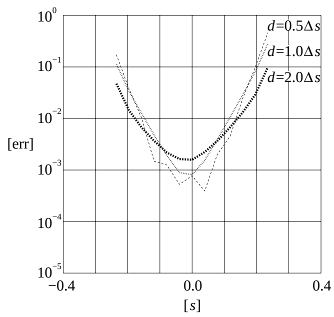
図-3 中の s はターゲット要素からの距離で y 軸の正の方向を正としている。err は近似解と正解との相対誤差である。



図–2　正三角柱断面



図–3　仮想境界範囲を変化させた場合の解
左:数値解、右:正解との相対誤差



図–4　仮想境界間隔を変化させた場合の相対誤差

図-4 は仮想境界と真の境界との間隔を変化させた場合の結果である。同じ仮想境界範囲で 10^{-3} オーダーの精度を求める場合、仮想境界間隔をターゲット要素長の半分としたときが最も狭い仮想境界範囲とすることができる。

4　まとめ

計算結果から以下のことが言える。

- スムージング前の解に比べスムージング後の解の精度が大きく向上している。
- 仮想境界の範囲をターゲット要素からの片側要素数で 6 要素以上配した場合の解の精度は非常に良い。
- 仮想境界の範囲を広げるにしたがって精度の良い解が得られる範囲も広がる。
- 仮想境界間隔をターゲット要素長の半分、仮想境界の範囲をターゲット要素からの片側要素数で 6 要素分とすることで、ターゲット要素付近において 10^{-3} オーダーの高い精度の解が得られる。

図示していないが、スムージング前の解の精度が良い点とその付近では得られる解の精度は非常に良いものとなった。

解を求めたい範囲のみを考慮しスムージングするという、比較的簡便かつ計算量の少ない手法によって高精度の解を得られることが確認できた。これをもとに、より少ない仮想境界範囲で高精度の解を得る手法の検討を行う。

参考文献

[1] 福井卓雄: 境界要素法の研究—高速・高精度計算法の開発と応用—, 京都大学学位論文, 1998

[2] I.S. Sokolnikoff: $Mathematical Theory of Elasticity$, McGraw-Hill, 1956