要素内降伏を考慮したHPMによる離散化極限解析法

法政大学　学生会員　○大木　裕久
法政大学　　正会員　　竹内　則雄
法政大学　　正会員　　草深　守人

1. はじめに

ハイブリッド型の変分原理では，変位の連続性を若干緩め，付帯条件をLagrangeの未定乗数により変分表示に導入している．このLagrangeの未定乗数にばねの考え方を導入し，ばね定数としてペナルティを用いる手法としてハイブリッド型ペナルティ法(Hybrid-type Penalty Method : HPM)がある．この手法においては崩壊機構と表面力の連続性を満たすことより上界値を与えられることが知られている．またHPMでは，要素内応力が考慮されているため，要素内での塑性条件を考慮することで下界値が得られることが考えられる．つまり，要素境界辺上での破壊と要素内での破壊を同時に評価することができる．そこで，本論文ではHPMの要素内に降伏条件を考慮させ，Vノッチのある薄板の引張解析を行い，崩壊荷重値，塑性域の進展，荷重変位関係に関してFEMとの比較検討を行う．

2. ハイブリッド型仮想仕事の原理

図1に示す領域Ωは閉境界$\Gamma^{(e)}$で囲まれたM個の部分領域$\Omega^{(e)}$から構成されている．この時，幾何学的境界条件を満たす仮想変位δuを乗じて領域Ωについて積分し，ガウスの発散定理を用い，各部分領域の和として仮想仕事式を表す．また，隣接する2つの部分領域$\Omega^{(a)}$と$\Omega^{(b)}$の共通の境界を$\Gamma_{<ab>}$とすると，ハイブリッド型の仮想仕事式は，境界において付帯条件をLagrangeの未定乗数$\boldsymbol{\lambda}$を用いて表すと式(1)のようになる．ここで，$u^{(a)}_{<ab>}$ならびに$u^{(b)}_{<ab>}$は各部分領域における境界$\Gamma_{<ab>}$上の変位を表している．

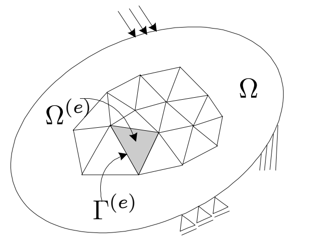

図1 部分領域とその境界

$$\sum_{e=1}^{M}\left(\int_{\Omega^{(e)}}[\boldsymbol{L}\delta\boldsymbol{u}]^t\boldsymbol{D}[\boldsymbol{L}\boldsymbol{u}]d\Omega-\int_{\Omega^{(e)}}\delta\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{f}d\Omega-\int_{\Gamma_{<s>}}\delta\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{T}d\Gamma\right)-\sum_{s=1}^{N}\left(\delta\int_{\Gamma_{<ab>}}\boldsymbol{\lambda}^t(\boldsymbol{u}^{(a)}_{<ab>}-\boldsymbol{u}^{(b)}_{<ab>})d\Gamma\right)=0 \tag{1}$$

本手法では，部分領域$\Omega^{(e)}$内のある1点における剛体変位，剛体回転$\boldsymbol{d}^{(e)}$に加え，直接，部分領域内で一定なひずみ$\boldsymbol{\varepsilon}^{(e)}$を用いて式(2)のような線形変位場を仮定する．ここで，上付きの(e)は部分領域を意味する．

$$\boldsymbol{u}^{(e)}=\boldsymbol{N}_d{}^{(e)}\boldsymbol{d}^{(e)}+\boldsymbol{N}_\varepsilon{}^{(e)}\boldsymbol{\varepsilon}^{(e)} \tag{2}$$

一方，Lagrangeの未定乗数は，物理的には表面力を意味している．いま，境界$\Gamma_{<ab>}$上の表面力$\boldsymbol{\lambda}_{<ab>}$と相対変位の関係を式(3)のように表す．ここで，$\boldsymbol{\delta}_{<ab>}$は部分領域境界面$\Gamma_{<ab>}$上の相対変位を表しており，$\boldsymbol{k}$はばね定数に対応する係数行列である．ハイブリッド型の仮想仕事式では，近似的に部分領域境界面上で変位の連続性を確保するため，極めて堅いばねを設ける必要があり，本手法では，ばね定数をペナルティ関数と考える．

$$\boldsymbol{\lambda}_{<ab>}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\delta}_{<ab>} \tag{3}$$

離散化方程式は，式(1)に対して，式(2)で示す線形変位場の関係を代入することによって得られる．この関係を整理すると式(4)のようにまとめることができる．このように，最終的に連立1次方程式に帰着し，左辺の係数行列$\boldsymbol{K}$は各部分領域の剛性と部分領域境界面に関する付帯条件の関係を組み合わせることによって得られる．

$$\delta\boldsymbol{U}^t\left(\sum_{e=1}^{M}\boldsymbol{K}^{(e)}+\sum_{s=1}^{N}\boldsymbol{K}_{<s>}\right)\boldsymbol{U}-\delta\boldsymbol{U}^t\left(\sum_{e=1}^{M}\boldsymbol{P}^{(e)}\right)=0 \quad\to\quad \boldsymbol{KU}=\boldsymbol{P} \tag{4}$$

キーワード：ハイブリット型ペナルティ法，要素内降伏
〒184-8584　東京都小金井市梶野町 3-7-2

3. 破壊条件と弾塑性マトリックス

本論文では降伏条件としてミーゼスの条件を用いる．降伏関数fは平面応力状態で式(5)のように表すことができる．

$$f=\sqrt{\sigma_x^2-\sigma_x\sigma_y+\sigma_y^2+3\tau_{xy}} \qquad (5)$$
$$f(\sigma)=0$$

また，本手法は剛体―バネモデル(Rigid-bodies Spring Model : RBSM)と異なり，弾性マトリックスを操作することで可能であるため，弾塑性問題に関しても弾性マトリックスを変更するだけで問題なく解析が行うことができる．弾塑性マトリックスは式(6)のようになる．

$$\boldsymbol{D}^{ep}=\begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2}-\frac{S1^2}{S} & \frac{\nu E}{1-\nu^2}-\frac{S1S2}{S} & -\frac{S1S3}{S} \\ & \frac{E}{1-\nu^2}-\frac{S2^2}{S} & -\frac{S2S3}{S} \\ sym. & & \frac{E}{1-\nu E}-\frac{S3^2}{S} \end{bmatrix} \qquad (6)$$

$$S1=\frac{E}{1-\nu^2}\left(S_{xx}+\nu S_{yy}\right),\quad S2=\frac{E}{1-\nu^2}\left(S_{yy}+\nu S_{xx}\right)$$
$$S3=\frac{E}{1-\nu^2}S_{xy},\quad S=S1S_{xx}+S2S_{yy}+2S3\tau_{xy}$$

4. 数値解析結果

数値解析例として，開き角 90 度の V ノッチのある薄板の弾塑性解析を行い FEM[1)]との比較を行った．**図 2** に解析モデルを，**図 3** に要素分割図（節点数 : 877，要素数 : 1700）を示す．解析では，対象性を考慮して 1/4 領域を解析対象としている．境界条件に関しては，底部を鉛直，左端を水平方向に拘束し，載荷方法としては右端に荷重制御を与える．また，表 1 は本研究に用いた材料定数である．**図 4** は FEM が崩壊荷重に至った715kgfでの塑性域の進展を示したVノッチ付近の拡大図である．HPM に関しては FEM の崩壊値に最も近い 720kgf での破壊の進展図を載せている．図中の網掛け部が降伏した要素である．図より，V ノッチ部から中央部に向かって破壊が進展しているのが伺える．HPM の崩壊状態に関しても 730kgf において中央部が破壊し，FEM と一致した破壊傾向が得られた．**図 5** に荷重変位関係を示す．実線が HPM，破線が FEM である．両曲線ともに初期剛性，曲線勾配が一致し，0.09mm 付近から V ノッチ部から中央部に塑性域の進展し，FEM715kgf，HPM730kgf で崩壊に至る．また，その差は 2%であり，良好な結果であると考えることができる．

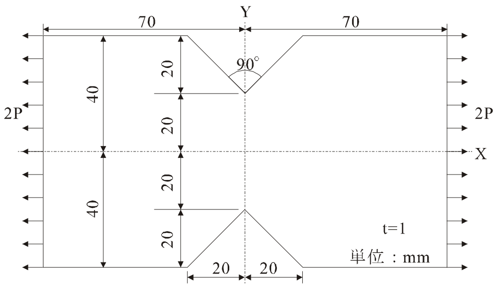

図 2　解析モデル

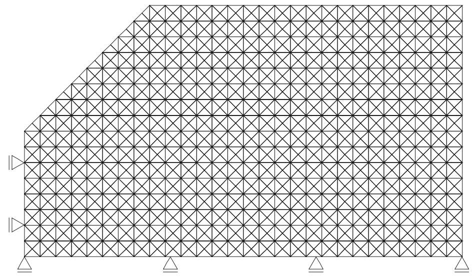
図 3　要素分割図

表 1　材料定数

弾性係数(kg/mm²)	2.0E+04
ポアソン比	0.3
降伏応力(kg/mm²)	30

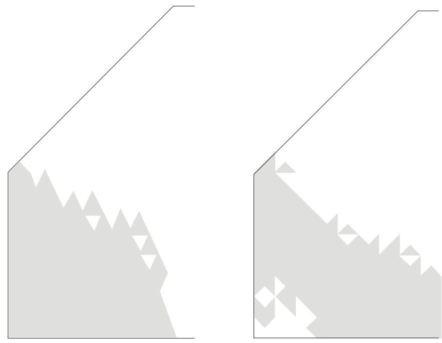

図 4　塑性域の進展図

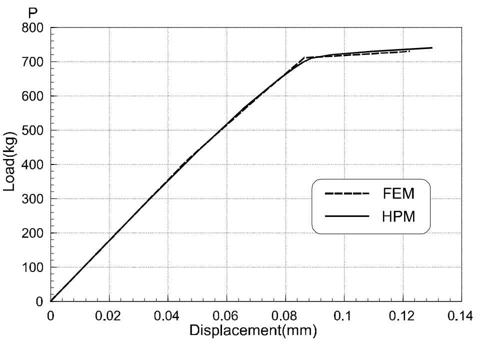

図 5　荷重変位関係

5. まとめ

本研究では，HPM の要素内に降伏条件を考慮し，開き角 90 度の V ノッチのある薄板の弾塑性解析を行い，FEM と比較検討を行った．その結果，破壊の進展，荷重変位曲線に関して類似した傾向が得られ，また，崩壊荷重値に関しても，その差は 2%であった．つまり，要素内での降伏条件を考慮する事で，要素境界面での破壊と要素内での破壊を同時に扱える事が考えられる．

1) Y.Yamada, N.Yoshimura and T.Sakurai : “Plastic Sress-Srain Matrix and its Application for the Solution of Elastic-Plastic Problem by F.E.M” , Int. J, Mech. Sci 1968. Vol 10