

メッシュフリー法とメッシュレス解析

清水建設技術研究所 正会員 櫻井 英行

1. はじめに

メッシュフリー法(MFM)は、メッシュ生成の鍵となる要素コネクティビティを必要としない、あるいは、解析過程でメッシュ生成や要素の存在を意識させない方法の総称である。EFGM¹⁾の発表がきっかけとなり、FEM 解析におけるメッシュ生成の障壁を根本的に解決する解析手法として期待され、様々な研究・開発や応用が行われてきた^{2,3)}。しかしながら、複雑な三次元形状でも扱える汎用的なシステムは、未だ開発されていない。しかも、実際に MFM に関する研究例を調査すると大変形やき裂進展問題など、確かに MFM の特徴を活かした報告は多いのであるが、最大の特徴であるはずの「メッシュが不要」を前面に出した報告は数えるほどである。MFM には、確かに欠点も多いが、それらに対する研究も早くから精力的に取り組まれており、汎用システム実現の致命傷になっているとは考え難い。本稿では、今一度、MFM の短所にスポットライトを当て、その解決方法を整理するとともに、MFM による汎用システム実現の真の障害、並びに、実用的な汎用システム実現のための現実的なアプローチについて著者の考えを示す。なお、MFM にはいくつもの方法がある^{2,3,4)}、本稿では、最も代表的な EFGM を中心として記載する。

2. メッシュフリー法とその短所

MFM では、領域内の任意の評価点においてその近傍の節点を集め、移動最小自乗法(MLS⁵⁾)などによって近似関数を構築する^{1,5)}。したがって、FEM のような要素の概念を必要とせず、局所近似を行うことができ、メッシュレス(メッシュ無し)解析を可能にするとされてきた。要素が無いことの利点は、メッシュ分割作業の解消だけでなく、き裂などの不連続場の扱いが容易、大変形に強いなどがあり、これまでの研究例は、むしろそういった利点に着目した報告が多い。長所についての詳細は MFM 全般の研究動向に関する報告^{2,3)}で早くから整理されているため、紙面の都合で割愛し、ここでは、MFM の欠点とそれに対する研究例に着目する。昨年の土木学会誌で野口⁴⁾は、MFM について概説しており、欠点として領域積分に関する 2 点と基本境界条件処理、計算効率に関する 2 点を指摘している。

2.1 領域積分^{2,3)}

FEM では要素を積分単位とし、要素積分の総和が、領域積分となる。MFM では、要素がないので、それに変わる積分単位が必要になる。最も代表的な方法は、バックグラウンド・セルと呼ぶ構造格子を用いる方法である。それは、図 1 に示すように節点とは独立に解析領域を包含するように設定される。各セルに対しては、数値積分公式が適用される。セルの大きさと積分点数は、解析精度に強く影響するため、十分な細かさが必要である。しかし、むやみに細かくすれば、計算時間の浪費になるだけである。適切なセルの大きさ、積分点数の目安については、いくつかの提案がある¹⁾など、バックグラウンド・セルは、解析領域形状と一致しないので、領域形状を表現するため、一般に

は、解析領域境界と交差するセルには、細かい積分点を配置し、領域外の積分値をゼロにする方法がとられるが、構造格子ではなく、オクトリー(八分岐)セルを自動生成する方法も提案されている。また、解析領域境界を精度良く表すために FEM メッシュが用いられる場合も少なくない。あるいは、完全なメッシュレスを意識し、節点を積分点に用いる方法も研究されている。しかし、節点だけで精度良く積分するためには、非常に細かい節点が必要になり、実用上は、ポロノイ・セルや構造格子(バケットとも呼ばれる)が必要となる。

2.2 基本境界条件処理^{2,3)}

MLS⁵⁾によって構築される形状関数の節点座標値は、未知関数の節点値に一般には一致しないため、基本境界条件式が、厳密に満足されない。これも、MFM の欠点として、早くから研究されており、ラグランジュ未定定数法や修正ラグランジュ未定定数法、ペナルティ法より基本境界条件の制約を緩和する方法、MLS⁵⁾において特異な重み関数を導入する方法、境界部分にのみ有限要素の形状関数を用いる方法、線形拘束式により基本境界条件の自由度を消去する方法などが提案されている。これらの方法には、それぞれ長所短所があり、一概にどれが優れているとは言えないが、ペナルティ法は、未知数の増加はなく、剛性マトリックスの正定値性とバンド状態も保たれ、解析精度も良好な上、プログラミングが容易なため、広く採用されている。欠点は、数値的に十分大きなペナルティ数を導入することにより、マトリックスの条件数が大きくなり、共役勾配法等の反復法による連立一次方程式解法を用いると収束性が悪い、または、収束しないといった状況に陥る点であろう。

2.3 計算効率が悪い^{2,3)}

メッシュフリー法は、積分点の解析領域に対する内外判定、評価点周りの節点収集、形状関数構築など、最終的な離散化線形代数方程式の求解より、それを構築するまでのプロセスの方に多大な計算時間を要する。これに対し、有向グラフ理論により形状関数構築のための節点検索時間を改善する方法、MLS⁵⁾による形状関数とその導関数の陽的表現により、逆行列の計算を回避する方法、並列計算による大規模解析コードの開発といった報告などがある。上述の領域積分に

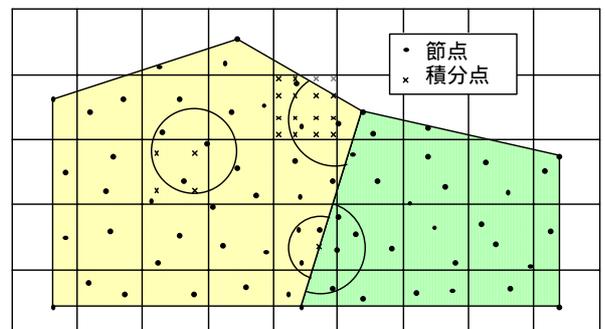


図 1 領域積分のためのセル構造と影響領域

キーワード: 不整合メッシュ集合体, consistency-free mesh assembly (CMA), メッシュフリー, メッシュレス, エレメントフリー

連絡先: 〒135-8530 東京都江東区越中島 3-4-17 清水建設(株)技術研究所原子カグループ TEL(03)3820-8419, FAX(03)3820-5959

おける節点密度に応じたセル分割や八分岐セルの自動生成も計算効率改善のための研究に他ならない。MFMを部分的に適用し、その他はFEMで解くといった両者のハイブリッド解析も、メッシュフリー法の計算効率改善に関するアイデアである。

3. 汎用システム実現への障害

以上のようにMFMには欠点はあるが、一方では、それらに対する研究例は多く、汎用システム実現への致命的な欠点であるとは考えにくい。また、MFMは確かに計算効率は悪く、FEMの10倍以上の計算時間を要する場合も珍しくはない。しかし、複雑な解析対象の場合、FEMでは、メッシュ分割に必要な時間は、数日から数週間以上を要する場合もある。たとえ計算時間が1時間から10時間になったとしても、メッシュ分割に要する時間が数日から一日に短縮されるメリットの方が大きいとも言える。計算時間は、日進月歩のハードウェアの発展により自動的に短縮されるが、メッシュ分割における対話形式オペレーションの効率化は、ほとんど期待できないのである。メッシュフリー法が計算効率が悪いことは事実ではあるが、解析のトータル時間で考えると、一概に欠点として捕らえるのは、合理的ではないと思う。

それでは、MFMによる汎用システム実現の障害の実態は何か？表1は、FEMとMFMに必要な主なデータの対比である。FEM解析では、当然、要素と節点は必要であるが、数値積分のためのセルは要素があるので必要ない。一方、MFMは、要素がないので、数値積分のためのセルが必要になることは前述のとおりである。しかし、著者は、MFMが、要素を放棄したことによる最大の痛手は、解析対象の幾何形状定義を失ったことと考える。FEMでは、メッシュが解析対象の幾何形状そのものであるが、MFMでは、別途それを定義し、解析過程において保持する必要がある。それにも関わらず、この問題に関する研究報告が全くと言っていいほど見あたらないのは、不可解と言わざるを得ない。メッシュフリーとはいえ、節点情報に加えて解析対象の幾何形状定義は不可欠である。汎用メッシュフリー解析システム実現の障害の実態の一つは、この幾何形状定義であると考えられる。

MFMの研究報告の多くは、解析領域の定義について触れていないが、三次元では、STLなどの解析領域の表面形状を三角形パッチで表現しているのが一般的であろう。しかし、それらも解析領域境界に張ったメッシュ・データの一つである。さらに、前述の数値積分に用いられるバックグラウンド・セルやボロノイ・セルもメッシュに他ならない。MFMにおいても、実際には、広義のメッシュは利用されており、セル、パケット、パッチ、格子、グリッドというように、メッシュという言葉の使用が避けられているに過ぎないように思える。実際には、何らかのメッシュが必要であるにも係わらず、メッシュレス解析に執着するあまり、実用的な解析システムの実現が遅れているのではなからうか。

4. 汎用システム実現のアプローチ

上述のとおりMFMでも広義のメッシュの使用は現実的には避けられない。これに対し、著者は、メッシュ間の非適合と重複を許容する不整合なメッシュの集まり(CMA: Consistency-free Mesh Assembly)をMFMの入力データとすることにより、実用的な解析システムを実現できることを示し、三次元地下水浸透流解析において地質構造や地下施設などのメッシュ生成/修正が非常に柔軟に効率よく行えることを具体的な数値計算例で明示した⁵⁾⁶⁾。解析手法によらず解析対象の幾何形状定義は必須である。実際にはFEM用のメッシュ生成にもペー

スとなる幾何形状定義は必要となる。メッシュ生成の困難にする本質的な要因の一つは、FEM解析用の不整合のないメッシュ生成を前提とした幾何形状定義に対する制約であり、その制約の緩和がメッシュ生成の合理化の鍵とも言える。著者の提案するCMAは、その制約を解消するものである。また、領域積分に関しても、積分点の解析領域に対する内外判定が不要、節点密度に応じた積分セル・サイズの面で非構造格子の方が有利である。さらに、FEMプリ/ポストプロセッサは、CAEの構成要素として発展し、完成度も非常に高い。境界条件の設定や解析結果の図化処理等にFEMプリ/ポストプロセッサをそのまま流用できることは大変大きな強みである。真のメッシュレス解析システムに拘るのではなく、メッシュであっても、生成が容易で、利用価値が高ければ、積極的に利用の方が合理的であると考えられる。

5. おわりに

当初、メッシュフリー法はメッシュレス法と呼ばれることが多かった。メッシュフリー法という呼称が主流になったのは、ここ数年であろう。メッシュフリー法による汎用解析システム実現の真の障害は、メッシュレスを犯すことに対するある種の罪悪感と言えるかもしれない。

引用文献

- 1) Belytschko, T. et al.: Element-free Galerkin methods, *I. J. Num. Meth. Eng.*, 37, 229-256, 1994.
- 2) Belytschko, T. et al.: Meshless methods: An overview and recent developments, *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 139, 3-47, 1996.
- 3) Li, S. and Liu, W. K.: Meshfree and particle methods and their applications, *Appl. Mech. Review*, 55, 1-34, 2001.
- 4) 野口裕久: メッシュフリー法, *土木学会誌*, 88-8, 21-22, 2003.
- 5) 櫻井英行: Element-free Galerkin法を応用した新しい三次元地下水浸透流解析システム, *土木学会論文集*, 720/25, 63-75, 2002.
- 6) 櫻井英行: メッシュ生成の問題に供するメッシュフリー法と不整合メッシュの応用, *日本機械学会論文集A*, 70-691, 346-353, 2004.

表1 FEMとMFMの対比

	FE analysis	Meshfree analysis
Nodes	Necessary	Necessary
Elements	Necessary	Unnecessary
Integration cells	Unnecessary (Elements)	Necessary (Background cells, etc)
Geometry definition	Unnecessary (Elements)	Indispensable (STL, VRML, etc)

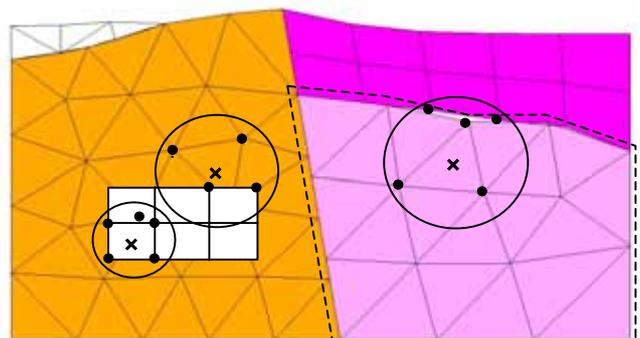


図2 メッシュ間の非適合と重複を許す不整合メッシュ集合体