

## 局所変形を考慮した近似計算法の平板に対する適用性

松江工業高等専門学校 正会員 ○柴田 俊文

北海道大学大学院 フェロー 三上 隆

(株)地崎工業 正会員 須藤 敦史

## 1. はじめに

構造物に物体が衝突する場合，局所変形を考慮している修正 Hertz 理論を用いて解析を行うが，計算の簡易化のためばね質量系に置換して解析を行う場合が多い<sup>1)</sup>．著者らはこれまでに梁に剛球が衝突する場合を考え，ばね定数の決定方法を提案してきた<sup>2)</sup>．本研究ではこの方法を平板に適用し，数値妥当性について検討する．

## 2. 解析手法

図-1 に示すように一辺の長さ  $L \times L$ ，厚さ  $h$  の四辺単純支持の平板を考え，平板の中央に質量  $m_c$  の剛球が初期速度  $v_0$  で衝突すると仮定する．ここで平板の弾性係数を  $E$ ，密度を  $\rho$  とする．局所変形をばね定数  $k_1$  の線形のばね（等価剛性と称する）に置き換えると，衝突時の平板と剛球の運動方程式は以下の二式となる．

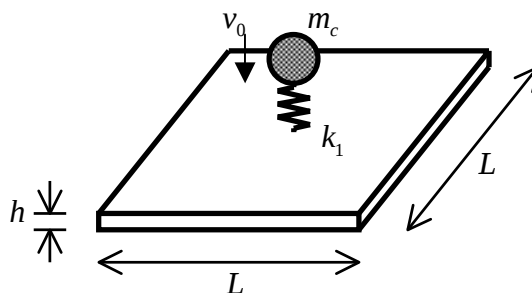


図-1 解析モデル

$$m_c \frac{d^2 u_1}{dt^2} + k_1 (u_1 - u_2) = 0 \quad (1)$$

$$D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = k_1 (u_1 - u_2) \delta(x - x_c) \delta(y - y_c) \quad (2)$$

ここで  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ ， $\nu$  はポアソン比， $w$  は平板の変位， $(x_c, y_c)$  は平板の中央の座標であり，平板の減衰は無視している．本研究では平板はモード解析により計算を行い，時間積分には Newmark  $\beta$  法を採用した．初期条件は剛球の初期速度が  $v_0$ ，剛球の変位と平板の変位・速度は 0 である．剛球と平板との相対変位 0 の条件を境に二物体は分離し，剛球は等速直線運動，平板は自由振動を始める．その後，相対変位が正になると再度二物体は接触する．なお，衝撃力は次式で表される．

$$f = -m_c \frac{d^2 u_1}{dt^2} \quad \text{or} \quad f = k_1 (u_1 - u_2) \quad (3)$$

ここで， $u_1$  は剛球の変位， $u_2$  は平板中央の変位を示す．

## 3. 等価剛性の導出

等価剛性は文献 2) に基づいて以下のように導出する．

修正 Hertz 理論を用いて衝撃力を計算する（図-2）．この理論は非線形の積分方程式で表されるため，Newton-Raphson 法により解析を行う．衝撃力波形は解析諸元によって様々な形状に変化するが，ここでは正弦曲線の形状を示すものを用いる．

とは別に(1)，(2)の式より衝撃力を計算する．平板はモード解析により解析する．等価剛性  $k_1$  の値を大きくすると，衝撃力の最大値は大きくなり，接触時間は短くなる．逆に小さくすると衝撃力の

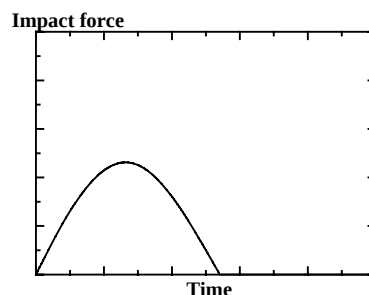


図-2 衝撃力波形（導出に使用）

キーワード：衝撃力，局所変形，ばね質量系，Hertz 理論，平板

連絡先：（住所：〒690-8518 島根県松江市西生馬町 14-4，電話・FAX：0852-36-5260）

最大値は小さくなり、接触時間は長くなる。ここでは で求めた衝撃力（図-2）と最大値、接触時間が一致するように等価剛性  $k_1$  を定める。

と の解析を(1)速度、(2)平板の一边の長さ、(3)剛球の質量、の三種類のパラメータを4通り（計64通り、表-1）に変化させて行う。ただし、 $c$  は縦波の速度で  $c = \sqrt{E/\rho}$  により表される。

等価剛性を求める式を式(4)で仮定する。

$$k_{dy}/k_{st} = f_1 \cdot f_2 \left( \frac{m_c}{\rho h^3}, \frac{M_0}{\rho h^3} \right) \cdot f_3 \left( \frac{v_0}{c} \right) \quad (4)$$

$$\text{ここに } f_1 = \alpha, \quad f_2 = \left( \frac{1}{\frac{m_c}{\rho h^3}} + \frac{1}{\frac{M_0}{\rho h^3}} \right)^\beta, \quad f_3 = \left( \frac{v_0}{c} \right)^\gamma$$

ここで式中の  $k_{st}$  は、三次元の有限要素法で離散化した平板の中央に静的に集中荷重を載荷し、その載荷地点の変位の逆数により求めた剛性（静的等価剛性）である。と で定めた等価剛性の値から最小二乗法を用いて、式(4)の  $\alpha$ 、 $\beta$  及び  $\gamma$  を決定する。これが等価剛性  $k_1$  を求める式であり、 $k_{dy}$ （動的等価剛性）で表されている。ただし、静的等価剛性により規準化して示している。計算した結果、 $\alpha = 3.358 \times 10^2$ 、 $\beta = -1/3$ 、 $\gamma = 2/5$  の値が得られ、特に  $\beta$  と  $\gamma$  の値は文献2)の梁の場合と同様の値が得られている。

表-1 導出に用いるパラメータ

| パラメータ                       | 導出に用いた値                                                                              |
|-----------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|
| 初期速度<br>( $v_0/c$ )         | $1.0 \times 10^{-6}, 1.0 \times 10^{-5}$<br>$1.0 \times 10^{-4}, 1.0 \times 10^{-3}$ |
| 一边の長さ<br>( $L/h$ )          | 10, 50, 80, 100                                                                      |
| 剛球の質量<br>( $m_c/\rho h^3$ ) | $1.0 \times 10^{-3}, 1.0 \times 10^{-2}$<br>$1.0 \times 10^{-1}, 1.0 \times 10^0$    |

上記のパラメータを組み合わせて解析する

#### 4. 解析結果

図-3に解析結果を示す。平板の自由度は100を用い、時間刻み  $\Delta t$  は解析対象である平板の基本周期の1/1000になるように設定した。なお、衝撃力（縦軸）、時間（横軸）ともに無次元化して波形を表示している。破線が修正 Hertz 理論を Newton-Raphson 法で解いた結果で、実線が本研究で提示している解析方法による衝撃力波形である。(a)が3のと同様に正弦曲線の形状を示す場合で、(b)、(c)、(d)はそれ以外の形状を示すものであり、それぞれ図中の右上に諸元を示している。ただし、 $M_0$  は平板の質量を表す。

これらの解析結果より、いずれの場合も良好に衝撃力波形を近似していることがわかるが、(c)の場合、最初の立ち上がり部に若干の差が見られる。(c)は平板の一边の長さが長い場合であり、さらに文献2)の梁の場合でも梁の長さが長い場合、(c)と同様の結果が示されている。このことから、一边の長さが長い場合、修正 Hertz 理論の非線形性が強く表れることが推察される。

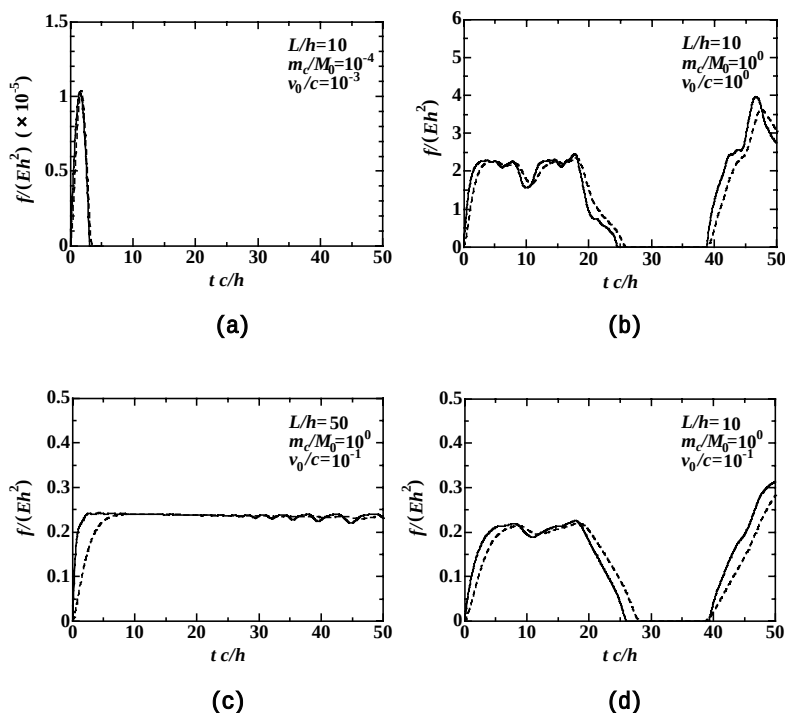


図-3 衝撃力波形（解析結果）

#### 参考文献

- 1) Lee, Y., Hamilton, J.F. and Sullivan, J.W. : The lumped parameter method for elastic impact problems, *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol.50, pp.823-827, 1983.
- 2) 柴田俊文, 三上隆, 佐藤昌志, 須藤敦史 : 剛球の梁への衝突における衝撃力の近似計算法, 土木学会論文集, N0.647/ -51, pp.167-176, 2000.