高次のHC空間への射影を考慮したスペクトル確率有限要素法

京都大学防災研究所　正会員　本田 利器

1.　はじめに

土木工学の諸問題において，パラメタの不確定性は不可避の問題であり，その合理的かつ効率的な考慮を可能とする技術への要求は大きい．不確定性を考慮する解析手法は種々提案されており，その中の一つとして，筆者等はGhanem[1]らが提案したスペクトル確率有限要素法(SSFEM)の適用を提案している[2].

SSFEMは，不確定性を有するパラメタの空間的分布をKarhunen-Loève展開，解をPolynomial Chaos展開した形で近似したうえで，対象となる方程式を有限次数までのHC空間の直交基底上に射影することで，該当するHC空間における最良近似を算出するものである．本報告では，対象とする方程式を近似するHC空間の次数を高く設定することでSSFEMの解析精度を向上させる手法を提案し，その有効性について数値計算により検証する．

2.　スペクトル確率有限要素法(SSFEM)

(1)　従来の定式化

SSFEMの定式化について

$$\boldsymbol{K}u = p \tag{1}$$

という方程式を対象として簡潔に述べる．ここで，$\boldsymbol{K}$は不確定性を有するパラメタを含む作用素を離散化した係数マトリクス，u, pはそれぞれ解と入力とする．簡単のため，pは不確定性を有しないものとする．

SSFEMでは，不確定なパラメタの空間的分布をKarhunen-Loève展開（KL展開）する．KL展開では，対象とする確率過程$G(x,\theta)$を，$G(x,\theta) = \sum_{i=0}^{\infty} \xi_i(\theta)\, G_i(x)$と展開する．ここで，$x$は空間座標位置; θは確率空間における事象; $\bar{s}$はsの期待値; $G_i(x)$は展開の基底関数; ξ_iは正規直交性を有する独立Gauss確率変数（ただし，$\xi_0 = 1$）をそれぞれ表わす．後述する数値計算例では剛性が不確定性を有するため，G_iの各項に対応する剛性マトリクス$\boldsymbol{K}_i$を用いて，式(1)の剛性マトリクスが

$$\boldsymbol{K} = \sum_{i=0}^{N_{KL}} \xi_i \boldsymbol{K}_i \tag{2}$$

と展開される．ここで展開次数（和をとる上限）は有限値N_{KL}で打ちきる．

一方，解$u(\theta)$は，独立Gauss変数$\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots)$を引数とするPolynomial Chaos凡関数$\Psi_i(\boldsymbol{\xi})$を用いて，次式のようにPC展開した形で表現する．

$$u(\theta) = \sum_{i=0}^{\infty} u_i \Psi_i^{N_{KL}}(\boldsymbol{\xi}) \tag{3}$$

SSFEMでは，式(2),(3)を式(1)に代入した式をHomogeneous Chaos (HC)空間に射影する．$\Psi_i^{N_{KL}}(\boldsymbol{\xi})$は，HC空間の直交基底を構成するので，これらの基底に射影して得られる式を満たす解を算出することで，近似残差$\varepsilon = Ku - p$の考慮しているHC空間内でノルムを最小にする意味での最良近似が得られる．

(2)　高次HC空間を考慮したSSFEMの定式化

従来のSSFEMでは，解ベクトルuを展開したHC空間と同じ次数までのHC空間において最良近似を与える解を算出していた．ここでは，より高い次数までを考慮したHC空間における最良近似を算出することを提案する．無限大の次数までのHC空間（H^{∞}）を考慮する場合，残差$\boldsymbol{\epsilon}$のノルムは

$$\|\boldsymbol{\epsilon}\|_{\mathsf{H}^{\infty}} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\langle \boldsymbol{\epsilon}\Psi_k^{(N_{KL})}\rangle^{\top} \cdot \langle \boldsymbol{\epsilon}\Psi_k^{(N_{KL})}\rangle\right)}{|\Psi_k^{(N_{KL})}|^2} \right)^{1/2} \tag{4}$$

と与えられる．しかし，ある有限の次数（N_{HC}^{+}とおく）よりも高い次数のHC空間への射影は恒等的に0になることが示されるので，式(4)の和は有限項で打ち切ることができる．このノルムを最小化する解uは，

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{u}_i} \|\boldsymbol{\epsilon}\|^2_{\mathsf{H}^{N_{HC}^{+}}} = 0 \tag{5}$$

を解くことで得られる．

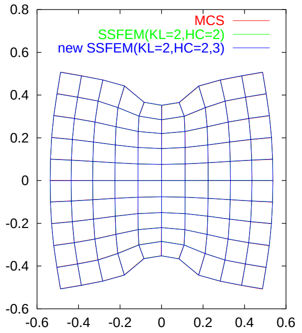
3.　解析例

(1)　問題設定

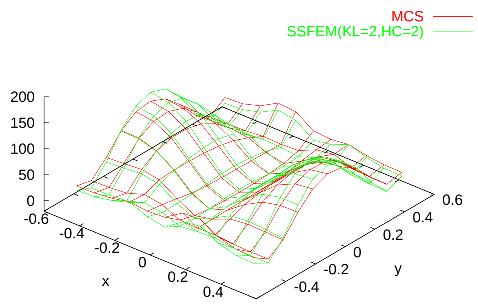
提案するSSFEMの適用性をについて検討するため，弾性体の静的な変形問題に適用する．

正方形の領域を10×10の要素に分割し，上下辺の中央に外力を加える．剛性がガウス分布を有する不確定性を有するものとした．領域内の2点$(x_1, y_1), (x_2, y_2)$での剛性の相関関数が$C(x_1, y_1, x_2, y_2) = (\gamma\bar{G})^2 \exp\left\{-\frac{(|x_1-x_2|+|y_1-y_2|)}{1.0}\right\}$（$\bar{G}$は期待値）と与えられるとし，そのばらつき（標準偏差）は期待値の30%とした（$\gamma = 0.3$）．KL展開は2次までとり，解は2次までのHC空間で展開する．従来の

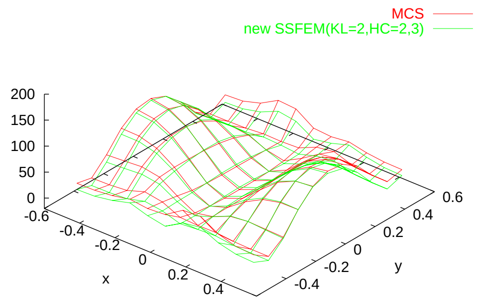
キーワード：不確定性，スペクトル，確率有限要素法
連絡先：〒611–0011 京都府宇治市五ヶ庄　Fax 0774–38–4070



図–1 MCS, SSFEM (KL=2, HC=2) 及び提案する SSFEM (KL=2, HC=2,3) により算出された変形の期待値の比較.



(a) SSFEM (KL=2, HC=2)



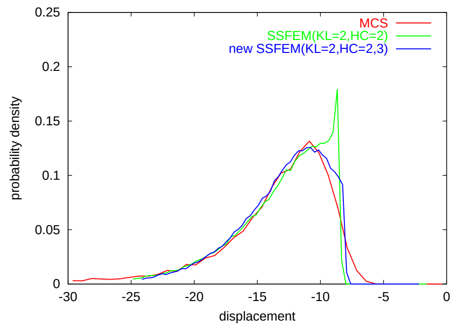
(b) proposed SSFEM (KL=2, HC=2,3)

図–2 MCS，SSFEM，及び提案する SSFEM による変位の x 成分の分散の分布の比較

SSFEM の定式化では方程式は 2 次までの HC 空間に射影される．提案する SSFEM では $N^{+}_{HC} = 3$ となるので，3 次までの HC 空間を考慮する．以下では，これらをそれぞれ SSFEM(KL=2,HC=2) 及び SSFEM(KL=2,HC=2,3) と表記する．

(2) 解析結果

図–1 に，MCS，従来の SSFEM(KL=2,HC=2)，提案する SSFEM(KL=2,HC=2,3) によって算出された変形の期待値の比較を示す．三者による結果は良く一致している．**図–2** には，変位の x 成分の分散値の分布の比較を示す．従来の SSFEM でも良い精度で MCS と一致する結果を与えているが，提案する SSFEM の方が高い精度を示している．どちらの SSFEM においても解は 2 次までの HC 空間内で近似されており，精度の向上は純粋に高次の HC 空間までを考慮したことに起因するものである．**図–3** には，これらの 3 手法で算出した点 (–0.2, –0.1) における変位の x 成分の確率密度関数の比較を示す．従来の SSFEM では MCS の算出結果には見られないピークが存在する．一方，提案する SSFEM ではこのピークは見られず，MCS の結果に近い確率密度関数が算出されている．これらの比較結果は，提案する SSFEM が従来の SSFEM よりも高精度の解析を可能とすることを示唆するものである．



(a) x 成分

図–3 MCS，SSFEM 及び提案する SSFEM による変位の x 成分の確率 密度関数の比較

(3) 解析時間

上述した計算例のような線形問題の場合，いずれの SSFEM でも線形のマトリクス方程式を解くことで解を得る．ここで，提案する SSFEM のマトリクスの条件数は，従来の SSFEM の条件数のほぼ二乗の値となる．したがって，提案する SSFEM の解析時間は，従来の定式化に比較して増大する．

ここでは，共役勾配法による収束計算により解を算出している．従来の SSFEM の計算時間（CPU 時間）は 0.07 秒であるのに対し，提案した SSFEM の解析には 3.73 秒を要した．そのほかの計算例では両者の差はこれほど大きくない場合が多いが，一般に提案する SSFEM の解析時間は従来の SSFEM よりも一桁程度多い計算時間を要する傾向が見られた．

4. おわりに

スペクトル確率有限要素法の定式化において，従来よりも高次までの HC 空間を考慮して誤差ノルムを定義し，これを目的関数とする手法を提案した．また，数値解析例により，従来の SSFEM よりも計算精度が向上することを示した．ただし，計算時間はかなり長くなるため適用には十分な検討が必要である．

参考文献

1) Roger G. Ghanem, Pol D. Spanos : Stochastic Finite Elements – A Spectral Approach, Springer-Verlag NY, 1991
2) 本田利器 : スペクトル確率有限要素法によるランダム場の波動伝播解析, 土木学会論文集 No.689/I-57, pp.321–331, 2001