

周波数応答解析による Newmark β 法の時間刻みによる誤差評価

長崎大学大学院 学生員 ○平 貴子
長崎大学工学部 正会員 呉 慶雄

長崎大学工学部 フェロー 岡林 隆敏
東京鐵骨橋梁 正会員 木村 啓作

1. はじめに

構造物の振動応答シミュレーションを行う場合、Newmark β 法が一般的に用いられるが、時間刻みの設定により応答値が変化し、高次振動成分に誤差が生じることが知られている。本研究では、長崎県に架設されている西海橋を対象橋梁とし、連続系における周波数応答関数と、Newmark β 法により離散化された場合の周波数応答関数を求め、西海橋とその橋梁に車両が走行する場合の周波数応答関数を計算し、両者の共振曲線を比較することにより、時間刻み Δt の変化による影響について評価した。

2. 対象橋梁と走行車両の諸元

図-1 に対象橋梁として用いる西海橋の一般図を、図-2 に車両の 4 自由度系モデルを、表-1 に車両諸元を示す。

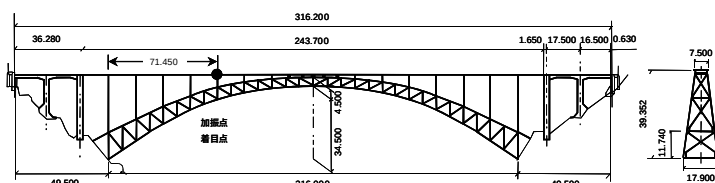


図-1 西海橋一般図（単位：m）

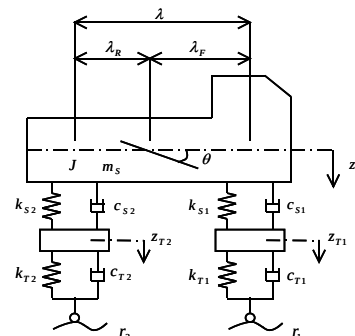


図-2 4 自由度車両モデル

3. 周波数応答関数

1) 連続系による周波数応答関数

連続系で記述された運動方程式は、次式で表される。

$$M\ddot{y}(t) + C\dot{y}(t) + Ky(t) = f(t) \quad (1)$$

(1) 式の両辺をラプラス変換し、連続系の周波数応答関数を求めると、次式となる。

$$H(s) = (Ms^2 + sC + K)^{-1} \quad (s = i\omega) \quad (2)$$

2) Newmark β 法による周波数応答関数

Newmark β 法による変位、速度、加速度は次式で表される。

$$y_{n+1} = y_n + \dot{y}_n h + (1/2 - \beta)\ddot{y}_n h^2 + \beta\ddot{y}_{n+1} h^2 \quad (3)$$

$$\dot{y}_{n+1} = \dot{y}_n + (\ddot{y}_n + \ddot{y}_{n+1})h/2 \quad (4)$$

$$\ddot{y}_{n+1} = (M + Ch/2 + \beta Kh^2)^{-1} [-Ky_n - (C + Kh)\dot{y}_n - \{Ch/2 + K(1/2 - \beta)h^2\}\ddot{y}_n + f_{n+1}] \quad (5)$$

この式を用いて、 y_{n+1} と $\dot{y}_{n+1}$ を y_n 、 $\dot{y}_n$ 、 $\ddot{y}_n$ で表し、ベクトル表示すると次式が得られる。ただし、 $\beta = 1/4$ とした。

$$\mathbf{Y}_{n+1} = \mathbf{A}\mathbf{Y}_n + \mathbf{B}\mathbf{f}_{n+1} \quad (6)$$

ただし、 $\mathbf{Y}_n = [y_n \ \dot{y}_n \ \ddot{y}_n]^T$ 、 $\mathbf{A}$ は応答についての係数マトリクス、 $\mathbf{B}$ は外力についての係数マトリクスである。時間進み演算子を Z とすると、 $\mathbf{Y}_{n+1} = Z\mathbf{Y}_n$ と表されるので、(6) 式に代入し、まとめると次式を得る。

$$\mathbf{Y}_n = (Z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{f}_{n+1} \quad (7)$$

(7) 式の外力 $\mathbf{f}_{n+1}$ の係数が周波数応答関数であり $H(Z) = (Z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$ となり、 $Z = e^{i\omega h}$ とおくと次式が得られる。

$$H(i\omega) = (e^{i\omega h}\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} \quad (8)$$

4. 車両が走行する橋梁の周波数応答関数

車両が走行中である橋梁の運動方程式は次式で表される。ここに $\mathbf{b}(t)$ は車両設置位置を表すベクトルである。

キーワード：橋梁振動、Newmark β 法、周波数応答、交通振動

連絡先：長崎大学工学部（〒852-8521 長崎市文教町 1-14, Tel095-819-2615, Fax095-819-2627）

$$M\ddot{y}(t) + C\dot{y}(t) + Ky(t) = F(t) = -b(t)F_v(t) \quad (9)$$

次に、橋梁上を走行する4自由度車両の運動方程式は次式で表される。

$$M_v\ddot{z}(t) + C_v\dot{z}(t) + K_vz(t) = F_v(t) \quad (10)$$

(9), (10)式を合成すると次のようになる。

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & M_v \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C + bb^T C_s & -bC_s \\ -b^T C_s & C_v \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{y} \\ \dot{z} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K + bb^T K_s & -bK_s \\ -b^T K_s & K_v \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -bK_s & -bC_s \\ K_s & C_v \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} r \\ \dot{r} \end{Bmatrix} \quad (11)$$

(11)式をベクトル表示すると、次式となる。ここに、 $r(t)$ は、 $r(t)$ と $\dot{r}(t)$ から構成されるベクトルである。

$$M_X \ddot{X}(t) + C_X \dot{X}(t) + K_X X(t) = F_X r(t) \quad (12)$$

(12)式を Newmark β 法により(7)式と同様に表すと、次式のようになる。

$$Y_n = (ZI - A)^{-1} B F_X r(t) \quad (13)$$

3の2)と同様に時間進み演算子 Z を用い、 $Z = e^{i\omega h}$ とすると、次式が得られる。

$$H(i\omega) = (e^{i\omega h} I - A)^{-1} B F_X \quad (14)$$

5. 数値計算結果と考察

1) 橋梁系の周波数応答関数

図-3は連続系と Newmark β 法による周波数応答関数である。なお、加振点と着目点は、図-1に示した。図-3 a)に Newmark β 法の時間刻みを $\Delta t=0.01(\text{sec})$ とした場合を、また図-3 b)に $\Delta t=0.001(\text{sec})$ とした場合を示す。実線は連続系を、破線は Newmark β 法を表している。 $\Delta t=0.01(\text{sec})$ の場合、8 Hz 付近までは良い一致が見られるが、それ以降の高周波数領域では、Newmark β 法の計算では周波数の低い方に誤差が拡大していることが分かる。それに対して、 $\Delta t=0.001(\text{sec})$ とすると、20Hz で良い一致を示している。

2) 車両走行がある場合の周波数応答関数

走行車両がある場合の連続系と Newmark β 法による周波数応答関数を図-4に示す。時間刻みを $\Delta t=0.01(\text{sec})$ および $\Delta t=0.001(\text{sec})$ として両者の結果を比較した。車両のない場合と同じく、8 Hz 以上で誤差が発生している。時間刻み $\Delta t=0.001(\text{sec})$ とすると、Newmark β 法の誤差は少なくなる。車両モデルの影響は、3 Hz 付近の応答に表れている。

6. まとめ

Newmark β 法 $\beta=1/4$ は無条件安定な解法であるので、時間刻み Δt に係わりなく解を求めることができる。交通振動解析において、高次振動を計算する場合、 Δt を適切に取らなければ誤差が発生する。時間刻み Δt による誤差の評価が、本手法で可能である事を確認した。

[参考文献] 1)岡林, 岡谷, 呉:路面凹凸のモデル化と不規則振動による道路橋交通振動加速度応答解析, 構造工学論文集 Vol.47A, pp411-418, 2001.3

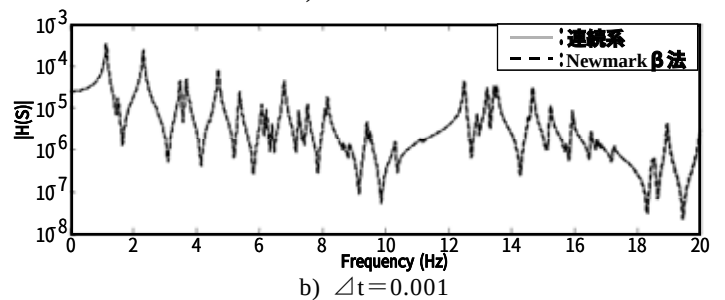
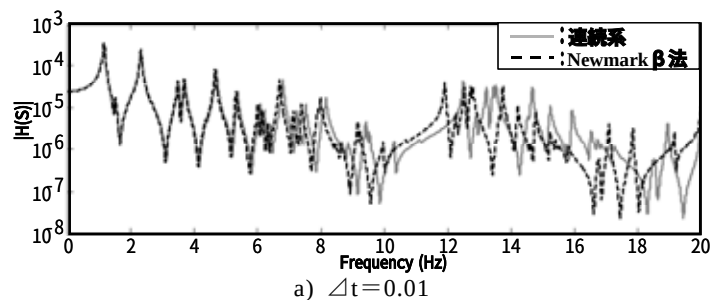


図-3 周波数応答関数

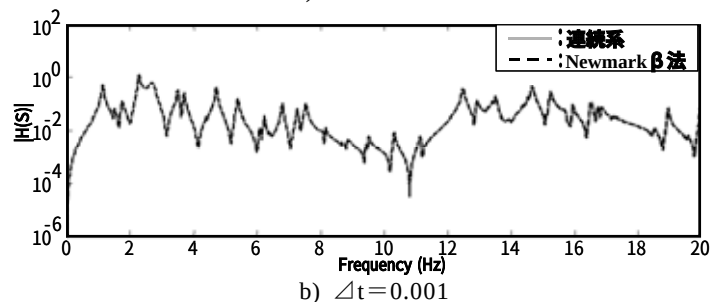
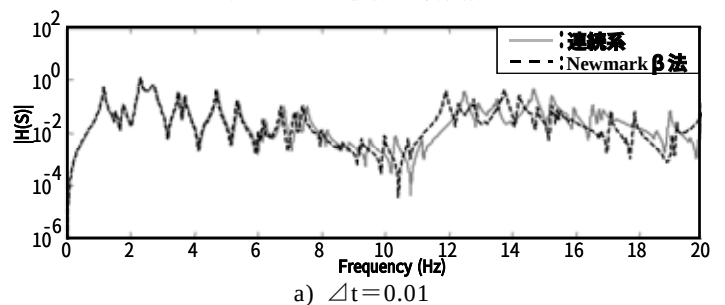


図-4 車両走行がある場合の周波数応答関数