

# ハイラーキ要素による平板の温度応力解析

函館工業高等専門学校 正員 ○渡辺 力  
長岡技術科学大学 名誉教授 正員 林 正  
川田テクノシステム株式会社 正員 齋藤道生

## 1. まえがき

長支間場所打ちPC床版を有する合理化橋梁において、施工時の温度応力が原因と考えられる床版のひび割れが報告されている。このため、鋼2主桁橋や鋼・PRC混合橋などで有限要素法による温度応力解析が盛んに実施されているが<sup>1)</sup>、これらの計算では適当な境界条件を導入して、橋梁の部分構造がモデル化されている。

著者らは、橋梁構造物の有限要素解析の効率化と高精度化を目的として、ハイラーキ有限要素法による構造解析システムを構築している。このハイラーキ要素は、変位の補間関数を高次化して精度を改善する  $p$  法の一つであり、要素分割を最小に抑えて、高精度の解が得られる特徴がある。これにより、効率的に橋梁構造物の全体解析が可能となる。

本報告では、橋梁構造物の温度応力解析の前段階として、円孔を有する円板の温度応力解析や平板の熱曲げ解析で本要素の精度を検証した結果を報告する。

## 2. 熱荷重ベクトル

ハイラーキ有限要素法による温度応力解析は、通常の有限要素法と同様に定式化できる。ここでは、ソリッド要素と板曲げに Mindlin 理論を用いた平面シェル要素の熱荷重ベクトルを示す。

### (1) ソリッド要素

初期ひずみ  $\epsilon_0$  を考慮して、応力－ひずみ関係式は次式で与えられる。

$$\sigma = D(\epsilon - \epsilon_0) \quad (1)$$

初期ひずみ  $\epsilon_0$  には、次の熱ひずみを用いる。

$$\epsilon_0 = \{\alpha T, \alpha T, \alpha T, 0, 0, 0\}^T \quad (2)$$

ここに、 $\alpha$  は熱膨張係数で、 $T$  は温度である。

式(1)を仮想仕事の原理に用いて、要素の剛性方程式が得られる。

$$k d = p + p_{\epsilon_0} \quad (3)$$

式(3)の右辺は荷重ベクトルを表し、熱荷重ベクトル  $p_{\epsilon_0}$  は次式で与えられる。

$$p_{\epsilon_0} = \int_V B^T D \epsilon_0 dV = \int_V \frac{\alpha E T}{1-2\nu} \{g_1, g_2, g_3\}^T dV \quad (4)$$

ここに、 $B$  はひずみマトリックス、 $D$  は弾性マトリックスで、 $g_i (i=1,2,3)$  は形状関数ベクトル  $f$  を座標  $x, y, z$  で偏微分したベクトルである<sup>2)</sup>。

### (2) 平面シェル要素

平面シェル要素では、板厚方向の温度差による温度変化  $T$  を用いる。

$$\left. \begin{aligned} T(z) &= T_0 + z\Delta T \\ T_0 &= (T_u + T_l)/2, \Delta T = (T_u - T_l)/t \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

ここに、 $t$  は板厚、 $z$  は板厚方向の座標、 $T_u$  と  $T_l$  は板上面と下面の温度である。

式(5)の  $T$  を用いて初期ひずみを次式で与える。

$$\epsilon_0 = \{\alpha T, \alpha T, 0, 0, 0\}^T \quad (6)$$

式(6)を式(4)の第2式に用いて、平面シェル要素の熱荷重ベクトルは次式で与えられる。

$$p_{\epsilon_0} = D_T \int_A \left\{ D_p T_0 g_1, D_p T_0 g_2, 0, -D_b \Delta T g_2, D_b \Delta T g_1 \right\}^T dA \quad (7)$$

$$D_T = \alpha(1+\nu), D_p = \frac{Et}{1-\nu^2}, D_b = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \quad (8)$$

## 3. 数値計算例

### (1) 円孔を有する円板

図-1に示す円孔を有する円板の温度応力解析を行って、平面応力状態での平面シェル要素の解析精度を調べる。計算モデルは内半径  $a=2$ 、外半径  $b=6$  で、材料定数には次の値を用いる。

$$E = 1000, \nu = 0.3, t = 1.0, \alpha = 0.012$$

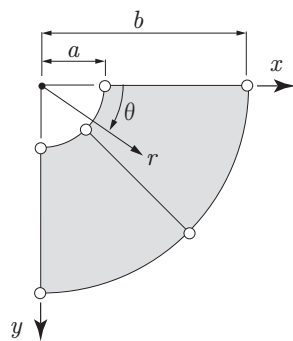


図-1 円孔を有する円板

**Key Words:** ハイラーキ要素, 温度応力解析, 熱荷重ベクトル, 特異要素

〒042-8501 函館市戸倉町 14-1, TEL:0138-59-6488, FAX:0138-59-6488

表-1 円孔を有する円板のたわみと応力の誤差 (%)

| $M=N$             | $u_r (r=6)$           | $\sigma_r (r=4)$      | $\sigma_\theta (r=2)$ |
|-------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| 4                 | $-2.7 \times 10^{-3}$ | 4.5                   | 1.5                   |
| 6                 | $-4.6 \times 10^{-5}$ | $-4.6 \times 10^{-1}$ | $1.8 \times 10^{-1}$  |
| 8                 | $-3.6 \times 10^{-5}$ | $4.2 \times 10^{-2}$  | $1.3 \times 10^{-2}$  |
| 10                | $-4.8 \times 10^{-5}$ | $-3.1 \times 10^{-3}$ | $-8.0 \times 10^{-3}$ |
| 解析解 <sup>3)</sup> | 0.156000              | 2.75000               | 14.0000               |

表-2 単純支持板のたわみと応力の誤差 (%)

| $M=N$             | 特異要素                  |                  | 非特異要素    |
|-------------------|-----------------------|------------------|----------|
|                   | $\bar{w}$             | $\bar{\sigma}_x$ |          |
| 4                 | 2.4                   | -25.3            | -2.6     |
| 6                 | $-5.2 \times 10^{-2}$ | 7.1              | -3.2     |
| 8                 | $1.1 \times 10^{-3}$  | -0.52            | -2.5     |
| 10                | $2.4 \times 10^{-4}$  | -0.17            | -1.9     |
| 解析解 <sup>5)</sup> | -0.0957728            | 0.250000         | 0.250000 |

温度勾配は半径方向に直線分布するものとして、内側を 10℃、外側を 30℃とする。要素分割は対称条件を考慮して板の 1/4 領域に 2 要素を用いて、円周は 4 次式で近似する。表-1 は、 $x$  軸上の変位と応力の解析解<sup>3)</sup>に対する誤差を示したもので、変位の補間関数には  $M=N=4 \sim 10$  次式を用いている。表より変位、応力ともに収束性は良好であり、高精度の値が得られていることが分かる。

## (2) 平板の熱曲げ

次に、平板の熱曲げ解析を行って要素の精度を調べる。計算モデルは、形状比  $a/b=1$  の正方形板で、板厚を  $t$ 、ポアソン比は  $\nu=0.3$  とする。また、温度勾配は曲げ応力のみが生じるように  $T_u=-T_l$  とし、その温度差を  $\bar{T}$  とする。要素分割をせずに、対称条件を考慮して板の 1/4 領域を 1 要素で計算する。

a) 平面シェル要素：板厚比  $t/b=1/100$  の単純支持板を計算する。2 つの単純支持辺を特異線とした 2 特異線要素<sup>4)</sup>(図-2 を参照) および通常の要素 (非特異要素) を用いたときの板中央点の変位と応力の解析解<sup>5)</sup>に対する誤差 (%) を表-2 に示す。なお、計算結果は次式により無次元化を行っている。

$$\bar{w} = wt/(\alpha \bar{T} b^2), \quad \bar{\sigma} = \sigma/(\alpha E \bar{T})$$

表より、非特異要素では応力の収束性が悪く、応力の精度を 1% 以下にするためには要素分割が必要なる。それに対して、特異要素では収束性が良好で、変位の補間関数に  $M=N=8$  次式を用いれば応力の誤差が 1% 以下となっている。

図-2 は、相対する 2 辺が単純支持され他の 2 辺が固定支持された (SCSC) 板の A-A 線上 ( $y=b/2$ ) の直応力  $\sigma_x$  を示したものである。ハイラーキ要素には、 $M=N=10$  次式を用いた 2 特異線要素を用いてい

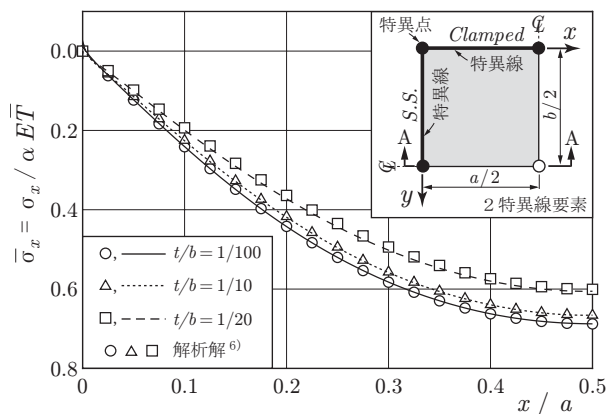


図-2 SCSC 板の応力 (平面シェル要素)

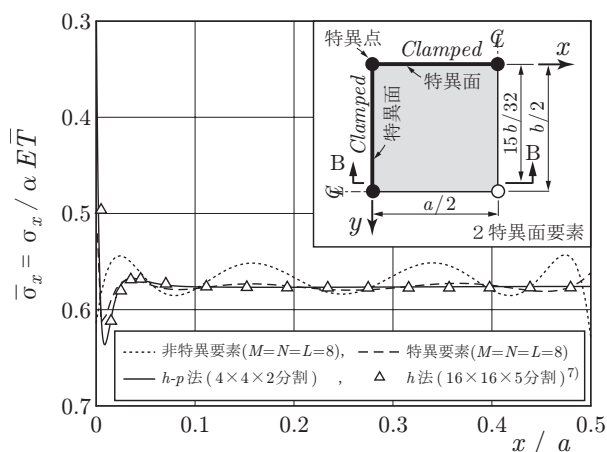


図-3 周面固定支持板の応力 (ソリッド要素)

るが、どの板厚比でもせん断変形を考慮した解析解<sup>6)</sup> (図の○印など) と良く一致した値が得られている。

b) ソリッド要素：図-3 は、ソリッド要素により計算した板厚比  $t/b=1/10$  の周面固定支持板の B-B 線上 ( $y=15b/32, z=9t/10$ ) の直応力  $\sigma_x$  を示したもので、2 つの固定支持面を特異面とした 2 特異面要素<sup>4)</sup>、非特異要素、 $4 \times 4 \times 2$  分割して  $M=N=8, L=5$  次式を用いた  $h$ - $p$  法、20 節点要素により  $16 \times 16 \times 5$  分割した  $h$  法<sup>7)</sup> による図心点応力の値も示している。

図より、非特異要素では応力が振動しているのに対して、特異要素では要素分割をしなくても  $h$ - $p$  法や  $h$  法の図心点応力と良く一致した値が得られている。

以上より、特異要素は応力の収束性を改善し、温度応力解析に有効であると言える。

## 参考文献

- 1) 例えば、寺田他：場所打ち PC 床版の温度応力解析に関する一考察、第 57 回年講 CS4-020, 2002.
- 2) 林 他：土木学会論文集, No.591/I-43, 1998.
- 3) 竹内洋一郎：熱応力, pp.76-108, 1981.
- 4) 林 他：土木学会論文集, No.738/I-64, 2003.
- 5) Timoshenko, S.P.: *Theory of Plates and Shells*, 1959.
- 6) Das, Y.C. and Rath, B.K.: Thermal bending of moderately thick rectangular plate, *AIAA J.*, 1972.
- 7) NISAI ユーザーズ・マニュアル：EMRC, 1994.