

曲げねじりを受ける曲線橋のそり剛性マトリックスの誘導

大同工業大学 正会員 事口壽男

1. まえがき 変形法による曲線桁橋の解析はきわめて少ない。曲げねじりを受ける曲線桁橋に関する剛性マトリックスを閉じた解で定式化した研究は皆無と思われる。本研究は微分方程式の解から剛性マトリックスを数学的に誘導する方法を示し、剛性マトリックスの各要素を閉じた代数解で表示することを試みる。また、分布荷重が作用する場合に対し、変形法で解析した研究は見当たらない。本文では分布荷重が載荷しても一貫したマトリックス演算のみで解析できるように剛性マトリックスを誘導する。最後に、分布荷重が載荷された3径間連続曲線桁橋を対象にし、伝達マトリックス法による解との比較を行っている。

2. 微分方程式の解 図-1に示した曲線桁橋に鉛直分布荷重qと分布トルクmが作用したとき、力のつりあい式、断面力と変位との関係をせん断中心上で求めると、次式で表される

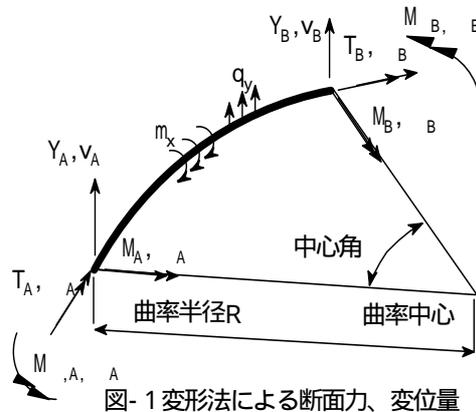
$$\begin{aligned} \frac{dY}{dl} &= -q, \quad \frac{dM}{dl} - Y + \frac{T}{R} = 0, \quad \frac{dT}{dl} - \frac{M}{R} = -m \\ &= \frac{dv}{dl}, \quad \frac{d}{dl} + \frac{1}{R} \frac{dv}{dl} \\ M &= -EI \left(\frac{d^2v}{dl^2} - \frac{1}{R} \right), \quad T = EI \left(\frac{d^2}{dl^2} + \frac{1}{R} \frac{d^2v}{dl^2} \right) \\ T &= GJ \left(\frac{d}{dl} + \frac{1}{R} \frac{dv}{dl} \right) - EI \left(\frac{d^3}{dl^3} + \frac{1}{R} \frac{d^3v}{dl^3} \right) \dots(1) \end{aligned}$$

この解を、図-1に示す変形法の符号に従って、表示すると次のようになる。

$$\begin{pmatrix} v \\ Y \\ M \\ T \\ M \\ 1 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 1 & f_{12} & f_{13} & f_{14} & f_{15} & f_{16} & f_{17} & f_{18} & f_{19} \\ 0 & f_{22} & f_{23} & f_{24} & -f_{16} & f_{26} & f_{27} & f_{28} & f_{29} \\ 0 & -f_{23} & f_{22} & f_{34} & f_{17} & f_{36} & f_{37} & f_{38} & f_{39} \\ 0 & 0 & 0 & f_{44} & -f_{18} & f_{28} & f_{47} & f_{48} & f_{49} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & f_{59} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & f_{12} & -f_{22} & -f_{23} & 0 & f_{69} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -f_{13} & f_{23} & -f_{22} & 0 & f_{79} \\ 0 & 0 & 0 & f_{84} & f_{14} & -f_{24} & f_{34} & -f_{44} & f_{89} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ Y \\ M \\ T \\ M \\ 1 \end{pmatrix}_A$$

ここに、

$$\begin{aligned} f_{12} &= RS, \quad f_{13} = -R(1-C), \quad f_{14} = \frac{R^2(S-(1/R)S_H)}{2} \\ f_{15} &= \frac{R^3}{EI} \left\{ \mu(S-C) - \frac{(1+2)^2 - 2(2+2)S-(1/R)S_H}{2} \right\} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} f_{16} &= -\frac{R^2}{EI} \left\{ \mu S - \frac{(1+2)^2 - 2(2+2)C-C_H}{2} \right\} \\ f_{17} &= \frac{R^2}{EI} \left\{ \mu(S-C) + \frac{S-(1/R)S_H}{2} \right\}, \quad f_{18} = -\frac{R(1+2-2C-C_H)}{EI} \\ f_{22} &= C, \quad f_{23} = -S, \quad f_{24} = R \frac{C-C_H}{2}, \quad f_{26} = -\frac{R}{EI} \left\{ \mu(S+C) - \frac{(2+2)S-S_H}{2} \right\} \\ f_{27} &= \frac{R}{EI} \left\{ \mu S + \frac{C-C_H}{2} \right\}, \quad f_{28} = -\frac{1}{EI} (S-(1/R)S_H), \quad f_{34} = R \frac{S+S_H}{2} \\ f_{36} &= \frac{R}{EI} \left\{ \mu S + \frac{C-C_H}{2} \right\}, \quad f_{37} = \frac{R}{EI} \left\{ \mu(S-C) - \frac{2(S-(1/R)S_H)}{2} \right\} \\ f_{38} &= \frac{1}{EI} (C-C_H), \quad f_{44} = C_H, \quad f_{47} = -\frac{(C-C_H)}{EI}, \quad f_{48} = -\frac{1}{R} \frac{S_H}{EI}, \quad f_{84} = EIR S_H \end{aligned}$$

ここに、
 $R = \sqrt{\frac{GJ}{EI}}, \quad \mu = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{1}{R} \right], \quad \frac{1}{R} = \frac{1}{R^2 I}, \quad \mu = 1 + \frac{1}{R}$
 $C = \cos, \quad S = \sin, \quad C_H = \cosh, \quad S_H = \sinh$

荷重負荷のように表示される。

$$\begin{aligned} f_{19} &= -\frac{R^4}{EI} \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{2}{2} \frac{2}{2} - \frac{C_H-1}{4} \right] + \left[1 + \frac{2+1}{2} \right] (C-1) + \left[1 + \frac{1}{2} \right] \frac{S}{2} \right\} \\ f_{29} &= -\frac{R^3}{EI} \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{S_H}{3} - \frac{2}{2} \right] + \left[1 + \frac{3+2}{2} \right] \frac{1}{2} S - \left[1 + \frac{1}{2} \right] \frac{C}{2} \right\} \\ f_{39} &= \frac{R^3}{EI} \left\{ \frac{1}{2} \frac{R^3}{2} (C_H-1) + \left[1 + \frac{+1}{2} \right] (C-1) + \left[1 + \frac{1}{2} \right] \frac{S}{2} \right\} \\ f_{49} &= \frac{qR^2}{GJ} (S_H - 3S) \\ f_{59} &= qR, \quad f_{69} = qR^2(C-1), \quad f_{79} = qR^2(S-), \quad f_{89} = -q \frac{R^3}{2} [-2C-C_H] \end{aligned}$$

キーワード 変形法、曲線桁、曲げねじり

連絡先 〒457-0818 名古屋市南区白水町4-0

大同工業大学 TEL 052-612-5571

3. そり剛性マトリックスの誘導 式(2)は次式のように記述できる。

$$\begin{pmatrix} R_B \\ R_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_A \\ R_B \end{pmatrix} \dots (3)$$

ここに、

$$B = \{v_B \quad \theta_B \quad \psi_B\}^T, \quad A = \{v_A \quad \theta_A \quad \psi_A\}^T$$

$$R_B = \{Y_B \quad M_B \quad T_B \quad M_B\}^T, \quad R_A = \{Y_A \quad M_A \quad T_A \quad M_A\}^T$$

$$F_{11} = \begin{pmatrix} 1 & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ 0 & f_{22} & f_{23} & f_{24} \\ 0 & f_{32} & f_{33} & f_{34} \\ 0 & 0 & 0 & f_{44} \end{pmatrix}, \quad F_{12} = \begin{pmatrix} f_{15} & f_{16} & f_{17} & f_{18} \\ f_{25} & f_{26} & f_{27} & f_{28} \\ f_{35} & f_{36} & f_{37} & f_{38} \\ f_{45} & f_{46} & f_{47} & f_{48} \end{pmatrix}$$

$$F_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f_{84} \end{pmatrix}, \quad F_{22} = \begin{pmatrix} f_{55} & 0 & 0 & 0 \\ f_{65} & f_{66} & f_{67} & 0 \\ f_{75} & f_{76} & f_{77} & 0 \\ f_{85} & f_{86} & f_{87} & f_{88} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} f_{19} \\ f_{29} \\ f_{39} \\ f_{49} \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} f_{59} \\ f_{69} \\ f_{79} \\ f_{89} \end{pmatrix}$$

式(3)から、 $B = F_{11}^{-1} A + F_{12} R_A + \dots$ が得られ、 R_A, R_B は、次式から求められる。

$$R_A = F_{12}^{-1} (-F_{11}^{-1} A + B) = K_{11} A + K_{12} B + K_{13} \cdot 1$$

$$R_B = F_{21} A + F_{22} R_A + R \cdot 1 = (F_{21} + F_{22} (-F_{12}^{-1} F_{11}^{-1})) A + F_{22} F_{12}^{-1} B + F_{22} (-F_{12}^{-1} A) + R \cdot 1$$

$$= K_{21} A + K_{22} B + K_{23} \cdot 1 \dots (4)$$

式(4)をマトリックス表示すると、

$$\begin{pmatrix} R_A \\ R_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ 1 \end{pmatrix} \dots (5)$$

すなわち、 $F = K \dots (6)$

あり、 F は外力ベクトル、 B は変位ベクトル、 K は荷重項を含んだ剛性マトリックスである。

4. 剛性マトリックスの規則性

式(6)の剛性マトリックスは、式(4)を用いると、数値演算では容易に求めることができるが、これを代数式で表示するには、手計算によるために莫大な時間を要する。

$$K = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & -k_{11} & -k_{12} & -k_{13} & -k_{14} & k_{19} \\ & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{12} & k_{26} & k_{27} & k_{28} & k_{29} \\ & & k_{33} & k_{34} & -k_{13} & -k_{27} & k_{37} & k_{38} & k_{39} \\ & & & k_{44} & -k_{14} & k_{28} & -k_{38} & k_{48} & k_{49} \\ 対称 & & & & k_{11} & -k_{12} & -k_{13} & -k_{14} & k_{19} \\ & & & & & k_{22} & -k_{23} & k_{24} & -k_{29} \\ & & & & & & k_{33} & -k_{34} & k_{39} \\ & & & & & & & k_{44} & -k_{49} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

まず、数値演算から、剛性マトリックスの要素において、荷重項を除いた部分では対称性が有り、太字で表した1/4のみの要素を求めればよいことがわかった。荷重項の部分は1/2のみの要素を求めればよい。

5. 代数式で定式化した要素

$K_{11} = -F_{12}^{-1} F_{11}$ を代数式で解いたものの中から、紙面の都合上 k_{11}, k_{12} のみを表示すると、次のようなる。

$$k_{11} = \frac{1}{(2-S^2)(S_H - 2(C_H-1) \frac{1}{2+2} (C-C_H) - C_H S(C-2) - S) + 2S_H(1-C)((C-S)^2 + (-S)) - SS_H(S+2C-2)^2(2-1) + 2(CC_H-1)(S+2C-2)^3}$$

$$= \frac{GJ}{R^3} (S_H^2 + 2(C-C_H) + 2S(CC_H-1)(2-)) - S^2 S_H(4-2^2 - 2+2)$$

$$k_{12} = \frac{GJ}{R^2} ((1-C)(2CC_H - S_H(S(-1)(+1) - (S+)) - 2) - S(C_H-1)(S+)) /$$

6. 数値計算例 図-2の3径間連続桁の解析結果を表1に示す。要素数は6分割である。文献²の結果と完全に一致している。

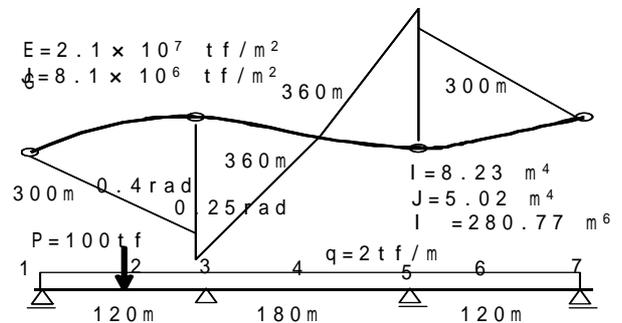


図-2 3径間連続曲線桁

表-1 計算結果の一例

各点	$-v \times 10^2$ m	$\times 10^{-4}$ rad	$M \times 10^3$ tf·m	$M \times 10^3$ tf·m ²
2	2.329	-3.511	3.687	1.451
4	3.580	1.185	2.849	0.606
6	0.195	1.371	1.678	-0.678

7. まとめ 曲げねじりを受ける曲線桁のそり剛性マトリックスの要素を代数式で表すことができた。これを用いると、変形法によって、複雑な曲線桁の解析が容易にでき、構造工学の部門に貢献できると思われる。

謝辞 福井工業大学 中井博教授には多大なご指摘を受けた。ここに、厚くお礼申し上げます。

参考文献 1) 名木野、事口 水平面に曲率を有する曲線桁の剛性マトリックスの誘導、58 回年次学術講演会 2) 中井、事口 伝達マトリックスによる鋼橋の解析、森北出版、1992