

Eulerian 有限要素法による固体の大変形解析

中央大学 学生員 ○金子 恭久
中央大学 正会員 榎山 和男
広島大学 正会員 岡澤 重信

1. はじめに

近年, 固体・構造解析において流体解析のように Euler 表記により解析する研究が行われている^{1), 3)}. Lagrange 表記に対して Euler 表記は, 計算要素が空間に固定されているため, その計算要素を超えて材料が移動する特徴を持つ.

本研究では, この Euler 表記に基づく構造解析手法(以下, Eulerian 有限要素法)における精度向上を目的としている. 解析手法には, operator split 法を採用し, 複雑な自由表面を取扱うのに有効な手法である界面捕捉法を適用する. 界面捕捉法を取扱う上で, 移流方程式を高精度に解くことは重要である. そこで本研究では, 材料含有率の移流方程式の解法に SUPG(Streamline-Upwind/Petrov-Galerkin)法に基づく安定化有限要素法を用いることの検討を行う. 数値解析例として, 棒の衝撃問題を取上げ, 既往の手法である MUSCL(Monotone Upwind Schemes for Conservation Laws)法¹⁾との解析結果を比較することにより, 本手法の有効性について考察する.

2. Euler 表記での支配方程式

(1) operator split 法

Lagrange 表記による支配方程式は, 物質時間導関数により次式のように示される.

$$\dot{\Phi} = f \quad (1)$$

ここで, 上付き・は物質導関数を表わし, Φ は任意の変数, f は外力項である. 物質時間導関数と空間時間導関数の関係は, 以下のような関係で定義される.

$$\dot{\Phi} = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad (2)$$

ここで, u , x はそれぞれ速度ベクトル, 位置ベクトルであり, 右辺第 2 項は移流項を表わす. 式(1), (2)より Euler 表記による支配方程式は, 次式で表わせる.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x} = f \quad (3)$$

ここで, 式(3)に対して, 次式のように operator split 法を用いて 2 つに分割する.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = f \quad (4)$$

$$\frac{\partial \Phi^*}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial \Phi^*}{\partial x} = 0 \quad (5)$$

式(4)は, 時間を進める Lagrangian ステップであり, *印は Lagrangian ステップ後の値を意味する. また式(5)は, 時間を止めた Eulerian ステップである.

(2) Lagrangian ステップ

弾塑性体に対する動的な平衡方程式は, 次式で示される.

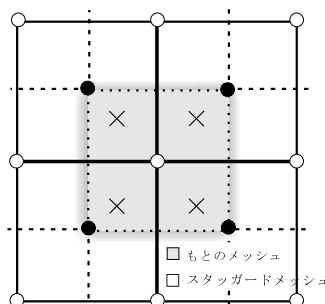


図-1 スタッガードメッシュ

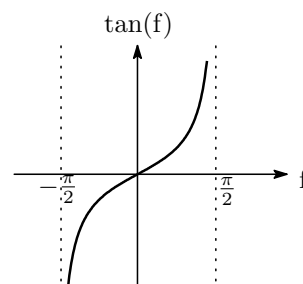


図-2 tangent 関数変換

$$\overline{M}\dot{u}^n + F_{int}^n = F_{ext}^n \quad (6)$$

ここで, $\overline{M}$ は対角化された集中質量行列, F_{int} は内力ベクトル, F_{ext} は外力ベクトルを表わす. また上添字 n は, 現時刻ステップであることを意味する. 式(6)に対して, 中央差分法を適用させると時刻 t^{n+1} の位置ベクトル x^{n+1} 及び, 時刻 $t^{n+\frac{1}{2}}$ の速度ベクトル $u^{n+\frac{1}{2}}$ は, 次式のように評価できる.

$$x^{n+1} = x^n + u^{n+\frac{1}{2}} \Delta t \quad (7)$$

$$u^{n+\frac{1}{2}} = u^{n-\frac{1}{2}} + \dot{u}^n \Delta t \quad (8)$$

このとき, 加速度ベクトル $\dot{u}^n$ は, 式(6)より求まる.

(3) Eulerian ステップ

自由境界面を表現するために, 計算要素内の材料含有率を移流させる VOF(Volume of Fluid)法を適用する. 材料含有率の移流方程式の解法に対してスタッガードメッシュ(図-1)を用いて, SUPG法に基づく安定化有限要素法を適用すると以下の有限要素方程式が得られる.

$$(M + M_\delta) \frac{\partial \Phi}{\partial t} + (N(u) + N_\delta(u)) \Phi = 0 \quad (9)$$

ここで, M, N は係数行列であり, 下添字 δ は, SUPG 項に起因するものを表わす. 一方, 材料パラメータにおける移流方程式の解法には, 式(10)で示される一次風上差分法を適用している.

$$\Phi_i = \Phi_i^* (1 - u \frac{\Delta t}{\Delta x}) + \Phi_{i-1}^* u \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad (10)$$

ここで, Δt は微小時間増分量, Δx は要素幅を表わす. また, 界面関数に対して不明瞭な領域を少なくするために, 式(11)に示される tangent 変換を施し, 移流方程式を解く. そして, 移流方程式を解いた後に整合性を保つため, 式(12)に示す tangent 逆変換を行う(図-2 参照).

$$\hat{\Phi} = \tan[(\Phi - 0.5) \times \alpha \times \pi] \quad (11)$$

$$\Phi = \frac{\tan^{-1}(\hat{\Phi})}{\alpha \times \pi} + 0.5 \quad (12)$$

KeyWords: Eulerian 有限要素法, 移流方程式, 安定化有限要素法, Tangent 変換

連絡先: 〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27 E-mail: kaneiko@kc.chuo-u.ac.jp

ここで、 $\hat{\phi}$ は tangent 変換後の値を意味し, tangent 関数の性質から $\alpha = 0.9$ を用いることにより, 鋭敏に界面を捉えることが可能となる⁴⁾.

3. 数値解析例

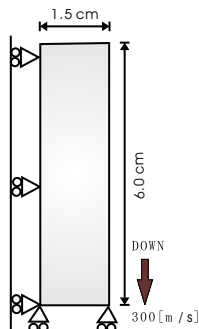


図-3 数値解析モデル

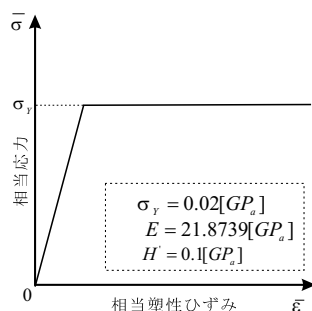


図-4 材料特性

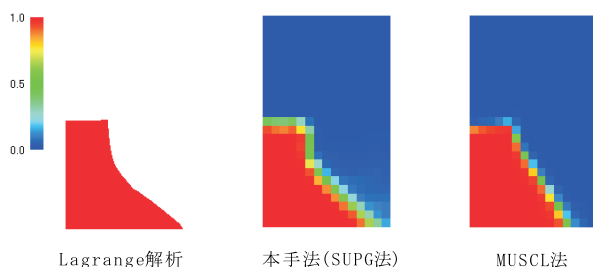


図-5 80 μ (sec) 後における変形状

(1) 解析方法

本手法の有効性を検討するために, 弾塑性材料の衝突解析を行う. 数値解析モデルは, 図-3 に示すように鉛直下向きに初期速度 300(m/sec) とする. 解析領域に対して, 縦 25 分割 × 横 15 分割の有限要素分割を行う. また材料特性は, 図-4 に示されるようにパイリニア硬化型の J_2 流れ則を使用し, ポアソン比は 0.28, 密度は 1710(kg/m³) を仮定する. そして, 従来の手法である Lagrange 表記における解析解, 既往の手法である MUSCL 法との解析解とを比較することにより, 本手法の妥当性及び, 有効性を検討する.

(2) 解析結果

図-5 は, 80 μ (sec) 後における Lagrange 解析, 本手法 (SUPG 法), MUSCL 法における変形状の結果, 図-6 は, 各手法における自由境界面での棒の先端変位を時系列で表示した結果, 図-7 は体積保存率の時刻歴である. 図-5 より, MUSCL 法は, 本手法に比べ界面を鋭敏に捉えている見えるが, 図-5 の変形状及び, 図-6 の棒先端変位の比較より, 本手法は, MUSCL 法より参照解の Lagrange 解析の結果とよい一致を示していることが分かる. また, 図-7 の体積保存率の時刻歴から MUSCL 法は, 4% の振動が見られるのに対して本手法は, わずか 2% の振動となっている. これらの結果より, 変形状及び体積保存率の点で本手法の有効性が示されたと言える.

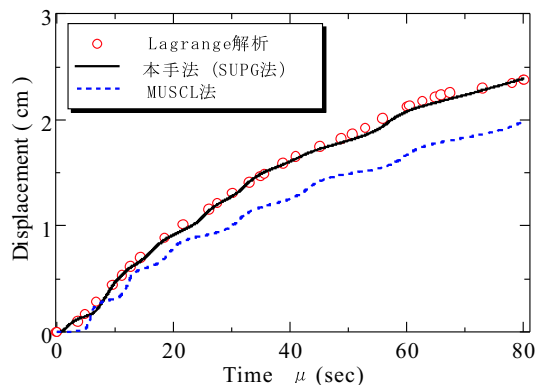


図-6 棒の先端変位における比較

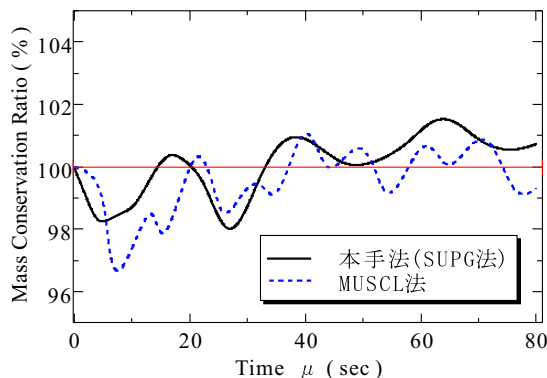


図-7 体積保存率の時刻歴

4. おわりに

本報告では, Eulerian 有限要素法に基づく大変形解析の精度向上のために, 材料含有率の移流方程式の解法に SUPG 法に基づく安定化有限要素法を適用した. 数値解析例を通じて, 以下の結論を得た.

- 本手法は, 従来の Lagrange 解析による変形状の結果と定量的に一致することが確認された. また, MUSCL 法に比べ界面関数になまりが見られたが, 棒の変形状及び, 先端変位の結果から Lagrange 解析解と一致し, 本手法の有効性が示された.
- 体積保存率は, MUSCL 法が 4% の振動に対して, 本手法は, わずか 2% の振動となり本手法の有効性が確認できた.

今後は, Eulerian ステップにおける移流方程式の解法全てに SUPG 法を適用し, 更なる精度向上の検討も行っていく予定である.

参考文献

- 1) 岡澤重信: オイラー型ハイドロコードにおける移流スキームの考察, 第 53 回理論応用力学論文集, pp493-494, 2004.
- 2) 日本数値流体力学有限要素法研究委員会: 有限要素法による流れのシミュレーション, シュプリンガー・フェアラーク東京, pp137-155, 1998.
- 3) Benson, D.J.: Computational Methods in Lagrangian and Eulerian Hydrocodes, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 99, pp.235-394, 1992.
- 4) 矢部孝, 内海隆行, 尾形陽一: CIP 法 原始から宇宙までを解くマルチスケール解法, 森北出版, pp14-53, 2003.
- 5) Tezduyar, T.E.: Stabilized finite element formulations for incompressible flow computations, *Advanced in Applied Mechanics*, 28, pp1-44, 1991.