

座屈後経路における超大変形解の特性に関する数値実験的研究

佐賀大学 学生会員○門田 和之 佐賀大学 正会員 帯屋 洋之
佐賀大学 正会員 井嶋 克志

1.はじめに

強い幾何学的非線形性を考慮しなければならないアーチやシェルのような変形様式が作用荷重のモードと異なるモードへ移行する屈服や分岐、飛び移り現象などが生じる座屈問題に対し、特異点近傍の座屈特性を把握することは極めて重要である。構造系の分岐現象の特異性を特徴づけるには、固有値、固有ベクトルを求め、これによって考察することが一般的である。本研究で用いた接線剛性法での非線形主経路追跡は、後藤ら一連のグループによって、その高い収束性と解の精度が実証されている。そこで、本研究では、主経路上の接線剛性マトリックスの固有値を調べることにより、超大変形解の特性を考察する。さらに、主経路上の釣合解近傍での全ポテンシャルエネルギー曲面を求め、エネルギーの変化を考察することで、超大変形域にある釣合解の特性及び分岐現象を把握し、接線剛性法特有の変位制御手法を用いることにより、分岐経路への切り替え及び追跡することを目的としている。

2.アルゴリズム

2-1.接線剛性法

接線剛性法とは、厳密な定式化の不可能な非線形剛性方程式を用いる必要がなく、接線剛性方程式、厳密な適合条件、要素端力式及び、平衡条件式で構成された反復ループにより、不平衡力を収束させる手法である。ここで、接線剛性方程式の一般式について述べる。

対象とする有限要素構造物の要素端節点に作用する、互いに独立な要素座標系表示の要素端力ベクトル \mathbf{S} 及び、基準座標系表示の節点力ベクトル \mathbf{D} の関係式は、両座標系間における平衡条件ベクトル \mathbf{J} を用いて次のように表すことができる。

$$\mathbf{D} = \mathbf{J}\mathbf{S} \quad (1)$$

これを全微分することにより、基準座標系における節点変位ベクトル $\delta\mathbf{d}$ の 1 次関数として次のように表示することができる。

$$\delta\mathbf{D} = \mathbf{J}\delta\mathbf{S} + \delta\mathbf{J}\mathbf{S} = (\mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_G)\delta\mathbf{d} \quad (2)$$

\mathbf{K}_0 は要素座標系における要素固有の剛性に起因する要素剛性マトリックスであり、 \mathbf{K}_G は剛体変位に起因する接線幾何剛性マトリックスである。

キーワード：接線剛性法、Jacobi 法、分岐点、全ポテンシャルエネルギー曲面

2-2.ポテンシャルエネルギー曲面の算定

ポテンシャルエネルギー停留状態の変化を観察することにより、釣合解の安定・不安定の判別を行うことができる。そこで、釣合位置から微小な変位を与えた不釣合解の全ポテンシャルエネルギーをプロットすることによって、全ポテンシャルエネルギー曲面を求め、釣合状態を判別する。ここで、本研究で用いた全ポテンシャルエネルギーの算出について述べる。

任意の経路上の平衡状態にある釣合解の全ポテンシャルエネルギー Π は、要素端力 \mathbf{S} と要素端変形 \mathbf{s} によって生ずる全ひずみエネルギー U と平衡状態の外力 \mathbf{P} 、その外力によって生ずる変位 \mathbf{u} によって、次のように表すことができる。

$$U = \frac{1}{2} \sum (\mathbf{s}^T \cdot \mathbf{s}) \quad (3)$$

$$\Pi = U - \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{u} \quad (4)$$

この経路上の釣合解の全ポテンシャルエネルギーを中心とし、釣合解の 1 節点に、微小な Δ の強制変位を与えた釣合解近傍の不釣合解の全ポテンシャルエネルギー $\Pi(\Delta)$ を次のように表す。

$$\Pi(\Delta) = U' - \mathbf{P}^T \cdot (\mathbf{u} + \Delta) \quad (5)$$

U' は不釣合解のひずみエネルギーであり、 \mathbf{P} は経路上の平衡状態を与える外力である。

3.数値解析

(1) Fig.1 に示した通り、節点数 15、要素数 14 の 2 ヒンジアーチに、変位制御及び荷重制御の切り替えを行うことにより主経路追跡及び、分岐経路追跡を行った。固有値は Jacobi 法により求めた。

変位制御点-集中荷重荷点はクラウン部（節点番号・8）としており、ライズ 8.0m、8.5m の 2 つの解析例を示した。

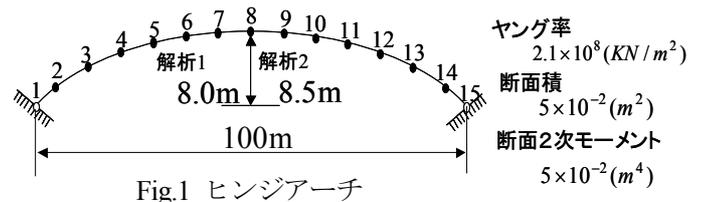


Fig.1 ヒンジアーチ

連絡先：〒840-8502 佐賀市本庄町一番地
佐賀大学理工学部都市工学科 tel(0952)28-8578

Fig.2,3 は、それぞれの場合の荷重-変位曲線であり、曲線内の数字は接線剛性マトリックスの負の固有値の数を示している。経路上最初に現れる分岐点 BP1 での経路の切り替えは、クラウン部の変位 2.7m の地点でクラウン部において、u 方向に -15kN の攪乱荷重を与えることによって行った。

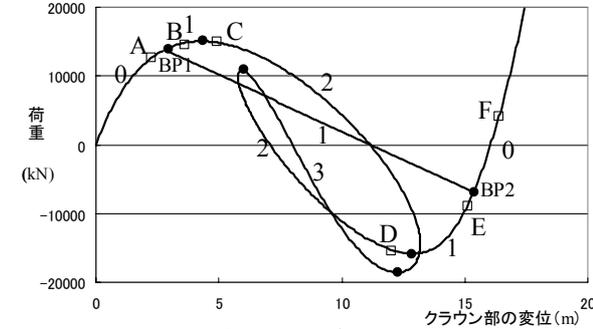


Fig.2 荷重-変位曲線(ライズ 8.0m)

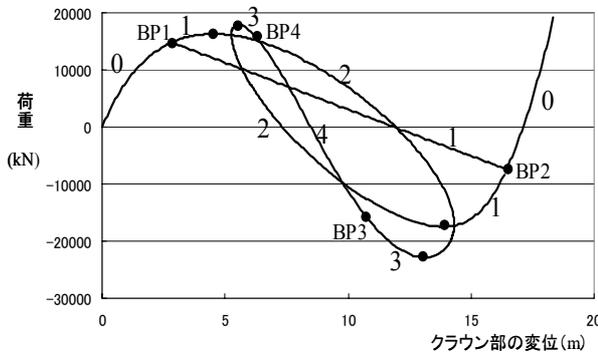


Fig.3 荷重-変位曲線(ライズ 8.5m)

分岐点及び荷重極限点で接線剛性マトリックスの負の固有値の数が変化していることが確認できた。また、負の固有値の数が Fig.2 では、最大で 3 つであるのに対し、Fig.3 において、4 つとなる部分があり、BP1-BP2 とは別の分岐経路 BP3-BP4 の存在が確認された。

(2) Fig.2 で示した A-F 点で、分岐点、荷重極限点前後においてエネルギーの変化を考察するため、u 方向、v 方向にそれぞれ $-0.01m \le \Delta u, \Delta v \le 0.01m$ の範囲で強制変位を与え、全ポテンシャルエネルギー曲面を求めた。また、Fig.5-2 は、Fig.3 で確認された分岐点 BP3 の近傍 (G : 分岐点前、H : 分岐点后) での全ポテンシャルエネルギー曲面である。

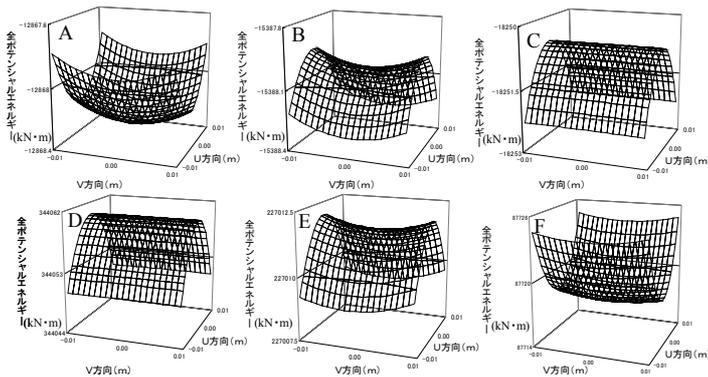


Fig.5-1 全ポテンシャルエネルギー曲面

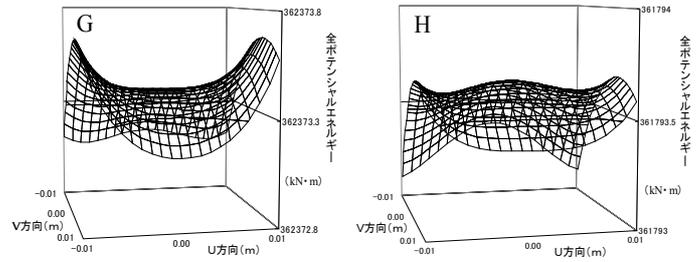


Fig.5-2 全ポテンシャルエネルギー曲面

特異点前後において、全ポテンシャルエネルギー曲面が凹の安定状態から凸の不安定状態に、また、凸の不安定状態から凹の安定状態に移り変わることが確認され、非対称分岐点では u 方向のエネルギー曲面に変化があることが確認された。また Fig.5-2 では、特異点後に主経路上釣合解の凸のエネルギー曲面近傍に凹のエネルギー曲面が存在していることが確認された。

(3) Fig.5-2 の G 点の主経路上の釣合解から H 点で確認された主経路上近傍にあるポテンシャルエネルギー停留点、すなわち変位制御点の反力が 0 となる釣合解に向けて、強制変位を与え、分岐経路への切り替えを行った。

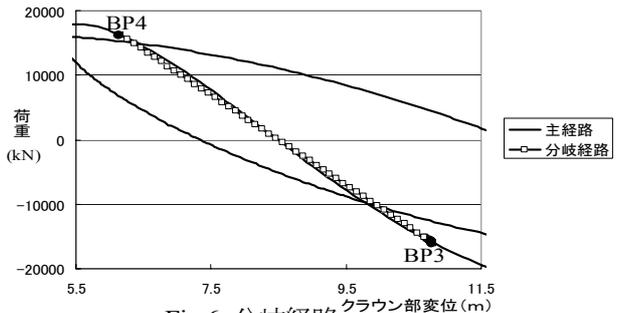


Fig.6 分岐経路

主経路上の釣合解から全ポテンシャルエネルギー曲面の凹の曲面に移動する BP3-BP4 の分岐経路を追跡することができ、主経路上の接線剛性マトリックスの特性と分岐現象を関連づけることができた。

4. 結論

数値解析結果により、接線剛性マトリックスの負の固有値の数の変化により、特異点を確認することができる。また、経路上の釣合解において、ポテンシャルエネルギー停留状態の変化をエネルギー曲面で観察することにより、特異点の特性、分岐経路への切り替え位置を把握することができ、主経路近傍にある極めて不安定状態である分岐経路をも追跡することができる。

今後、他の特異点の特性や、さらなる分岐経路の追及、3次元解析への拡張を課題としている。

参考文献

- 岡澤重信、藤井文夫、宇佐美勉 “幾何学的非線形構造系の数理分岐解析法”、土木学会論文集 No.556/I-38, pp95-106,1997.1
- 後藤茂夫・井嶋克志・帯屋洋之、接線剛性法による平面骨組の分岐釣合系の解析、構造工学における数値解析シンポジウム論文集第 18 巻、pp127-132、1994