ハニカムの変形パターンの対称性による分岐シミュレーション

東北大学　学生会員　成島雄嗣
東北大学　正員　池田清宏
宇都宮大学　正員　斉木　功

1. はじめに

材料の不安定挙動は，一般的に材料の持つ微視的構造の不安定に起因するものである．ハニカム構造やフォーム材に代表されるセル構造体は比剛性が高く，有望な構造材料として注目されている．セル状周期材料に巨視的一様変形のもとで圧縮負荷を与えると，セル壁に微視的座屈が生じ，セル形状は複雑に変化する．このような微視的座屈は，巨視的局所化を通じて材料の破壊を引き起こす恐れがあり，その力学的挙動を調べることは工学的に重要である[1)]．近年，六角形ハニカムの面内座屈分岐解析により，数多くの変形パターンが求められている[2)]．

本研究では，斉木らの解析法[3)] を用いて正六角形弾塑性ハニカムの等方二軸圧縮による面内座屈解析を行い，Saiki 他の理論的考察[2)] に基づき，分岐経路の方向を定め，座屈モードの変形パターンを調べる事とする．

2. 群論的分岐理論

群論的分岐理論の枠組みを示す．支配方程式は

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}, f) = \boldsymbol{0} \tag{1}$$

と表される．ここで $\boldsymbol{u}$ は N 次元ベクトル (N は節点数) であり，f は分岐パラメータである．主経路上の特異点において特異性条件式

$$J(\boldsymbol{w}_c, f_c)\boldsymbol{\eta}_{ic} = \boldsymbol{0}, \quad i = 1, \cdots, M. \tag{2}$$

が成り立つ．ここで J は接線剛性行列，M は特異点 ($\boldsymbol{u}_c$, f_c) の多重度を意味する．$\boldsymbol{\eta}_{ic}$ ($i = 1,\cdots,M$) はゼロ固有値に対する固有ベクトルであり，正規直交するようにとる．M 重分岐点における分岐解の方向の候補は $\boldsymbol{\eta}_c = \sum_{i=1}^{M} c_i \boldsymbol{\eta}_{ic}$ により与えられる．

ある非線型釣合式の対称性を記述するにあたり，鏡映や回転等を表す変換写像 g からなる群 G を考える．ある群 G に不変な構造物は，対称条件として，群 G に関する同変条件式

$$T(g)\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}, f) = \boldsymbol{F}(T(g)\boldsymbol{u}, f) \tag{3}$$

を満足する。ここに T(g) はこの座標変換の仕組を表す表現行列であり．条件式 (3) は，もし ($\boldsymbol{u}, f$) が非線形釣合方程式の解であれば，(T(g)$\boldsymbol{u}$,f) も解であることを表す多価性の条件である．ある群 G に同変な系は分岐に伴い対称性を階層的に喪失することが知られており，その仕組みは数値解析に先立ち，先験的に求めることができる．この仕組みは，分岐解析において有用な情報となる．

3. 解析方法・条件

本研究で対象とする 2×2 のセルからなる正六角形ハニカム構造を**図–1** に示す．図中の赤点線が 1 個のセルを示す．このハニカム構造の分岐の仕組みは Saiki 他によって調べられており[2)]，分岐モードは単純分岐では 1 種類，3 重分岐においてはモード I，モード II，flower mode の 3 種類があることがわかっている．これらの分岐モードの一例を**図–3**(b)～(j) に示す．また 3 重分岐点においてモード II，flower mode はモード I の組み合わせにより生成することができる．

(1) モード I　分岐経路の方向決定

3 重分岐点におけるゼロ固有値に対応する任意の固有ベクトルは特異条件式 (2) を満足する 3 つの直交する固有ベクトル $\boldsymbol{\eta}_{1c}$, $\boldsymbol{\eta}_{2c}$, $\boldsymbol{\eta}_{3c}$ を用いて，

$$\boldsymbol{\eta}_c = c_1\boldsymbol{\eta}_{1c} + c_2\boldsymbol{\eta}_{2c} + c_3\boldsymbol{\eta}_{3c} \tag{4}$$

Key Words: **ハニカム**, *flower mode*, **分岐解析**
〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 06

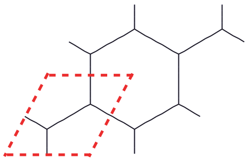
と表される．ここで，c_1, c_2, c_3 は

$$c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1 \tag{5}$$

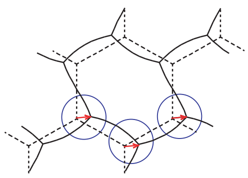
を満たすように正規化する．(c_1,c_2,c_3) の任意の値に対応する方向に分岐解が存在するのではなく，分岐解に対応する (c_1, c_2, c_3) の値の組は有限個であり，その値の組を得ることが分岐解析を行う際に重要である．

モード I の分岐解を求めるに際し，Saiki *et.al* の論文で求められているモード *I* の対称性の条件に着目する．例えば，モード *I* のうち，同じ変形状態のセルが水平方向に並ぶ $\boldsymbol{\eta}_{\mathrm{I}a}$ は**図–2** に示すように，*3* つの節点 α, β, γ の x 方向変位が等しくなるという対称条件を満たす．この条件と式 *(5)* より $\boldsymbol{\eta}_{\mathrm{I}a}$ の (c_1, c_2, c_3) が求められる．

モード *I* の他の固有ベクトル $\boldsymbol{\eta}_{\mathrm{I}b}$ と $\boldsymbol{\eta}_{\mathrm{I}c}$ に対する対称条件も**図–2** と同様に設定することができる．



図–1 2×2 セルによる解析モデル



図–2 変形条件例

(2) モード II と flower mode

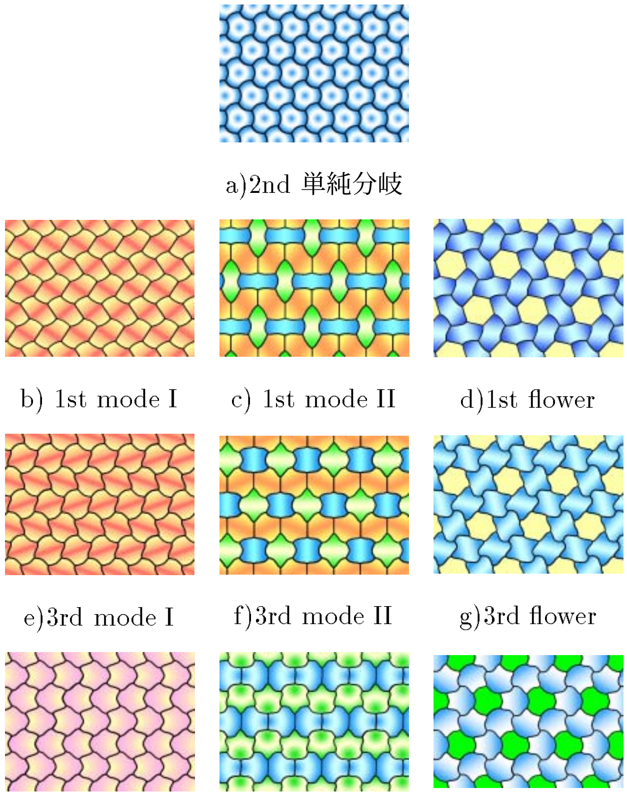
このようにして求めたモード *I* の固有ベクトル $\boldsymbol{\eta}_{\mathrm{I}a}$, $\boldsymbol{\eta}_{\mathrm{I}b}$, $\boldsymbol{\eta}_{\mathrm{I}c}$ を組み合わせることによりモード *II* と *flower mode* をつくることができる[2]．モード *II* は *6* 種類，*flower mode* は *4* 種類あるが，並進や回転により同一視できる物理的に等価なものであるので，どちらもその内の *1* つだけ求めればよい．

4. 適用例

2×*2* のセルを周期単位とする *96* 節点，*96* 要素の正六角形弾塑性ハニカム構造に等二軸圧縮負荷による面内座屈分岐解析を行った．

単純分岐点である第 *2* 分岐点と *3* 重分岐点である第 *1*，第 *3*，第 *4* 分岐点において分岐解析により求めた分岐後の変形モードを**図–3** に示す．同じ３重分岐点であっても，第１，第３分岐点と第４分岐点とでは分岐解の対称性が異なっており，用いる対称性の条件も異なっていた．

3 章で提案した手法により分岐経路が容易に求めることができた．一方，式 *(4)* において c_1, c_2, c_3 を任意に与える手法を用いた場合には，分岐解を体系的に求めることは困難であった．



図–3 分岐モード

5. 結論

本研究では正六角形ハニカムの変形パターンの *3* 重分岐における分岐解の一例を示した．他の *3* 重分岐点，より多重度の大きい分岐点，多段階の分岐における変形パターンの状況を調べること，あるいは *3* 次元のハニカム構造への拡張が今後の課題である．

参考文献

1) Gibson, L.J. & Ashby, M.F., [1997] "Cellular solids: Structure and Properties," 2nd ed., Cambridge Univercity Press.
2) Saiki, I., Ikeda, K., & Murota, K., [2003] "Flower patterns appearing on a honeycomb structure and their bifurcation mechanism." METR 2004-07, Univ. of Tokyo.
3) Ooue, K., Saiki, I., Terada, K., & Nakajima, A. [submitted] "Nonlinear multi-scale modeling with frame elements for cellular materials."