エレメントフリー法による厚板の幾何学的非線形解析

足利工業大学　　正 会 員 ○ 末武　義崇

１．まえがき

要素分割を必要としない数値解析手法であるエレメントフリー法（EFGM）については、これまで多くの研究報告がなされている。筆者らも、Lagrange の多項式に基づく簡易 EFGM を構築し、梁や薄板の有限変位解析や三次元物体の弾性解析、データ補間等に適用することにより、その有用性を示してきた [1),2)]。特に、Lagrange の多項式を用いて EFGM の定式化を行った場合、基本境界条件の直接的な処理が可能であることを明らかにした [1)]。また、他の EFGM と同様に、FEM 解析の際に問題になる shear locking 現象を、ある程度回避し得ることも明らかにした [2)]。このように、EFGM の持つ特徴がしだいに明らかになる中で、EFGM の適用範囲の拡大を図っていくことも重要な課題であると考えられる。

本研究は、筆者らの簡易 EFGM に関する、数値解析例の蓄積を目的としたものである。特に、薄板の有限変位解析に適用してきた簡易 EFGM を、厚板の有限変位解析にも適用可能となるよう、再定式化を図ることが主たる目的である。再定式化にあたっては、横せん断変形に関する Mindlin の仮定を採用し、回転自由度を独立変数として導入した。数値計算例として、横荷重を受ける矩形凸板の飛び移り座屈問題を選択した。

２．初期たわみを有する厚板の有限変位問題

初期たわみを有する厚板の有限変位問題に対応する無次元化汎関数の主要部は次式で与えられる。

$$\begin{aligned}\Pi=&\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}[\frac{12}{\zeta^2}(\varepsilon_\xi{}^2+\varepsilon_\eta{}^2+2\nu\varepsilon_\xi\varepsilon_\eta+\frac{1-\nu}{2\gamma^2}\varepsilon_{\xi\eta}{}^2)+\zeta^2(\rho_\xi{}^2+\frac{\rho_\eta{}^2}{\gamma^4}+\frac{2\nu}{\gamma^2}\rho_\xi\rho_\eta+\frac{1-\nu}{2\gamma^2}\rho_{\xi\eta}{}^2)\\&+6(1-\nu)\kappa\{(\frac{\partial\omega}{\partial\xi}-\theta_\xi)^2+\frac{1}{\gamma^2}(\frac{\partial\omega}{\partial\eta}-\theta_\eta)^2\}]d\xi d\eta-\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(\psi_1\alpha+\gamma\psi_2\beta+\zeta\psi_3\omega)d\xi d\eta\end{aligned}\qquad(1)$$

ここで、ξ および η は無次元化面内座標、α および β は無次元化面内変位、ω は無次元化たわみ、θ_ξ および θ_η は ξ および η 方向の回転角、$\psi_i\ (i=1\sim 3)$ は無次元化荷重、ν は Poisson 比、γ は縦横比、ζ は幅厚比をそれぞれ表している。また、κ は横せん断変形に関する補正係数であり、Mindlin の仮定を採用した結果生ずる、横せん断ひずみ分布と横せん断応力分布との非適合性を補正する係数である。式（１）における面内ひずみおよび曲げひずみについて、変位－ひずみ関係の一部を以下に示す。

$$\varepsilon_\xi=\frac{\partial\alpha}{\partial\xi}+\zeta^2\{\frac{1}{2}(\frac{\partial\omega}{\partial\xi})^2+\frac{\partial\omega_0}{\partial\xi}\frac{\partial\omega}{\partial\xi}\}\quad,\quad\rho_\xi=\frac{\partial\theta_\xi}{\partial\xi}\quad,\quad\rho_{\xi\eta}=\frac{\partial\theta_\xi}{\partial\eta}+\frac{\partial\theta_\eta}{\partial\xi}\qquad(2)$$

ここに、ω_0 は無次元化初期たわみである。式（１）で示した汎関数の停留条件から、Karmann-Marguerre の式を厚板問題に拡張した基礎方程式が得られる。

簡易 EFGM 定式化の詳細については省略するが、積分点における関数値や微分値を、サポート領域内の節点値によって離散的に表現することで、“要素”という概念を用いずに離散化された非線形の基礎方程式が得られる。さらに、得られた基礎式の増分をとることで、非線形解析における収束計算スキームを構築することができる。

３．解析モデル

本研究で解析対象としたモデルは、図１に示したような、２方向に余弦半波の初期たわみを与えた正方形平板 $(\gamma=1)$ である。特に、中央点に集中荷重 Γ を受ける矩形凸板の飛び移り座屈解析を実施し、薄板理論に基づく解析結果と厚板理論に基づく結果との比較を行った。

数値計算にあたっては、総節点数を $11\times 11=121$（均等配置）、Poisson 比 $\nu=0.3$ 、中央点の初期たわみ

キーワード：厚板，幾何学的非線形性，エレメントフリー法，Lagrange 多項式，飛び移り座屈
〒326-8558　足利市大前町 268-1 足利工業大学 都市環境工学科 TEL：0284-62-0605 FAX：0284-64-1061

$\omega_{C0}=1.0$とした。EFGM 解析のパラメータについては、薄板の解析において比較的良好な近似解を与えた組み合わせのものを選択し、サポートパラメータ$\rho=0.6$、Gauss 積分次数8、セル総数$5\times5=25$とした。幅厚比については、薄板を想定した$\zeta=0.02$と、中等厚板を想定した$\zeta=0.6$の２通りについて計算を行った。横せん断補正係数については$\kappa=5/6$とした。

非線形計算に際しては、中央点のたわみを制御パラメータとする変位増分法を用い、各増分区間で Newton 法のアルゴリズムに従った収束計算を実施した。収束判定については、反復計算の際に得られる不平衡力の大きさが、変位増分に対応する増分荷重の0.1％未満になるまでとした。各区間で与えた変位増分は0.1で常に一定とした。

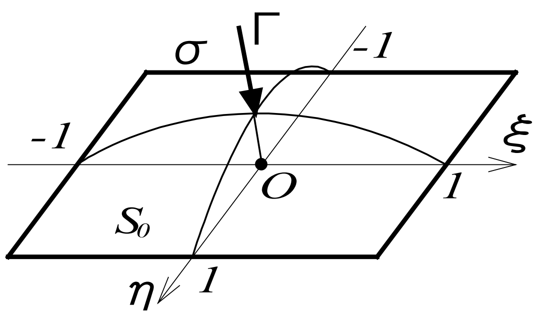

図１．横荷重を受ける矩形凸板

４．数値計算結果

解析結果を図２および図３に示す。図はいずれも飛び移り座屈の変形径路を示したもので、横軸に中央点の無次元化たわみω_C、縦軸に無次元化集中荷重Γをそれぞれとって表示した。図中、実線は薄板理論に基づく解析結果であり、プロットが今回新たに定式化を行った厚板理論に基づく結果である。

全ての解析結果において、飛び移り座屈径路が明確に捉えられている。また、２つの図から明らかなように、解析モデルの幅厚比が小さく、薄板と見なし得るモデルについては、薄板・厚板両理論に基づく解析結果がほぼ一致しているのに対し、幅厚比を大きく設定した厚板モデルについては、解析理論による結果の差異が明確に認められる。

得られた解析結果について、やや詳細な検討を行う。図３に示した変形挙動に着目すると、厚板と見なし得るモデルについては、厚板理論によって得られる変形径路が、薄板理論に基づく径路よりもかなり軟化する傾向が認められる。すなわち、厚板理論の方が同一荷重レベルおいてより大きな変形を生じ、飛び移り座屈のピーク荷重も低下する結果を与えている。この点については、解析結果の妥当性を別途検討する必要もあるが、厚板理論に基づく非線形解析の重要性を示す結果として注目すべきである。

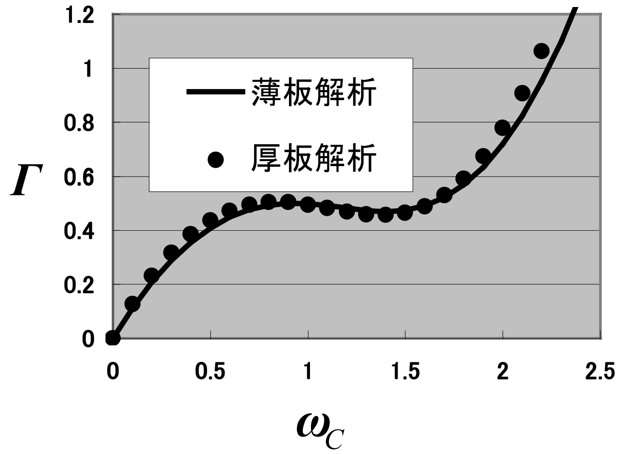

図２．飛び移り座屈径路$(\zeta=0.02)$

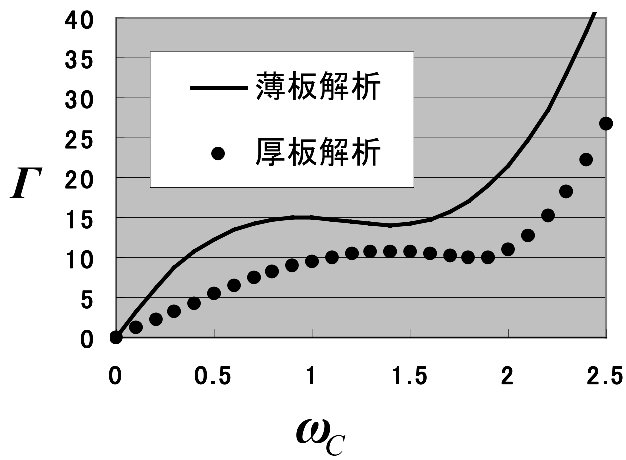

図３．飛び移り座屈径路$(\zeta=0.6)$

５．まとめ

Lagrange の多項式に基づく簡易 EFGM を、厚板の幾何学的非線形解析に適用し得るように再定式化した。再定式化にあたっては、横せん断変形に関する Mindlin の仮定を採用し、独立変数として回転自由度を導入する形で汎関数を構成した。数値計算の結果、厚板モデルについて、薄板理論に基づく数値解と明確に異なる計算結果が得られた。

参考文献：1) Y. Suetake: Element Free Method based on Lagrange Polynomial, J. Eng. Mech., Vol.128, No.2, pp.231～239, 2002.2.
2)末武・大須賀・友田: Lagrange 多項式に基づく三次元弾性問題の EFGM 解析，応用力学論文集，Vol.6，, pp.257～266, 2003.8.