

亀裂を含み周辺単純支持された長方形板の自由振動解析

名城大学 学生員 ○土山 正登 (株)安部工業所 正会員 國富 康志
東海女子大学 正会員 藤井 康寿 名城大学 正会員 中川 建治

1 解析対象

亀裂を含む平板や壁体の振動あるいは音響問題の基礎的な研究として、直線状の亀裂1本(支持線平行で偏在可能)を持つ長方形板の曲げ振動解析を報告する。このような研究は既に報告されている¹⁾が、発表者らの研究²⁾は亀裂先端に process zone を構成したもので、異なる解析法に基づくものである。

基礎式は薄板の曲げ振動として最も基礎的な式(1)に基づくものとして、亀裂の長さや中心位置と自由振動の固有周期との関係を研究する。解は $x < 0$ 部の解 $w_1(x, y, t)$ と $0 < x$ 部の $w_2(x, y, t)$ とする。

$$m \frac{\partial^2 w_j}{\partial t^2} + D \nabla^2 \nabla^2 w_j(x, y, t) = 0 \quad \dots (1)$$

長方形板は周辺で単純支持として、 y 方向 L_y 、 x 方向は y 軸を挟んで $L_{x1} + L_{x2}$ のサイズとする。亀裂は図1に示すように y 軸上にあり、完全開口部 ($M_x = R_x = 0$) の長さは $2a$ 、Process zone 相当部が両先端に長さ b として（この点が本研究の特徴である）設けられている。自由振動であるから解は次の形とする。

$$\begin{cases} w_j = e^{ipt} \sum_k X_{jk}(x) \sin\left(\frac{k\pi y}{L_y}\right) \\ X_{jk}(x) = \text{指数関数 (割愛)} \end{cases} \quad \dots (2)$$

2 開口の構成

Process zone を含めた開口部(変位不連続部)の形状 $g(\xi)$ は式(3)と図2に示すように区間 $2(a+b)$ 長を半周期とするフーリエ $\sin$ 級数 N_c 項で表せるものと仮定し、その係数(未定係数)を μ_k とする ($2(a+b)$ 区間のみを展開の有効区間として採用する)。

$$g(\xi) = \sum_{k=1}^{N_c} \mu_k g_k = \sum_{k=1}^{N_c} \mu_k \sin \frac{k\pi}{(a+b)} \eta \quad \dots (3)$$

解析では $N_c = 40$ 程度にしている。

次に開口を表す基本関数 g_k の両側に値 0 とする区間を付加して板のスパン L_y に亘る関数 $h_k(y)$ を定義してこれをフーリエ $\sin$ 級数 ($N_s = 140$) に再展開する。

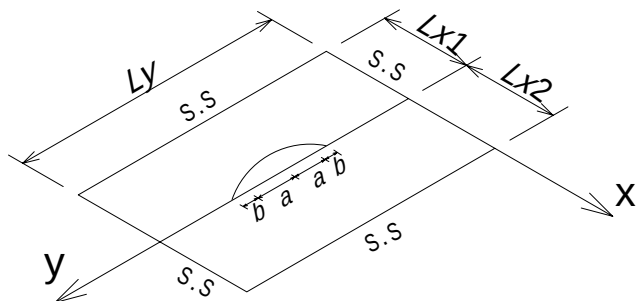


図1 解析対象とする平板と亀裂

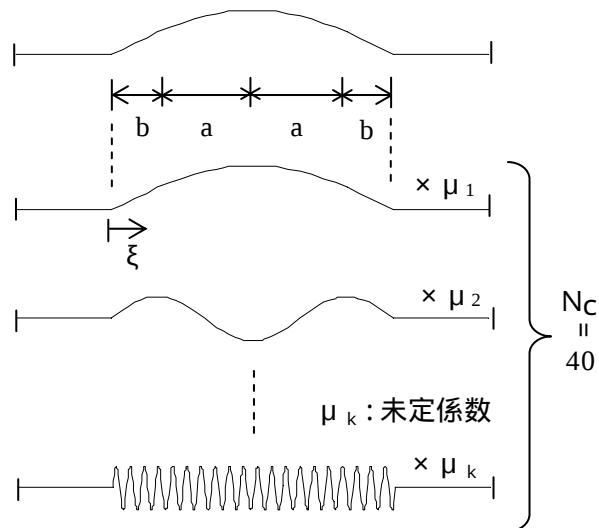


図2 亀裂開口部の形状

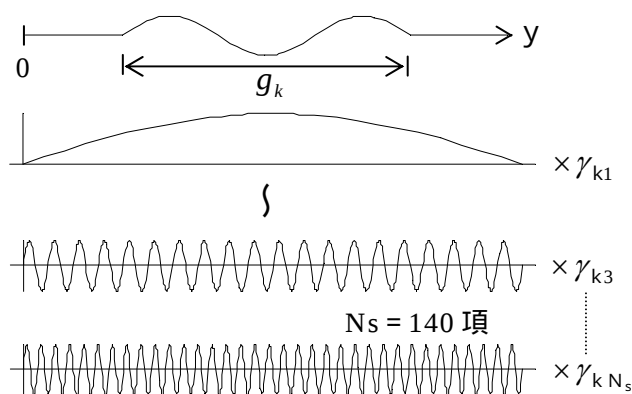


図3 板の長さ方向に関する形状

キーワード：亀裂，長方形板，振動，単純支持

連絡先：〒468-8502 名古屋市天白区塩釜口 1-501 名城大学理工学部 TEL 052-832-1151, FAX 052-832-1178

すなわち

$$\begin{aligned} h_k(y) &= 0, & 0 < y < \eta_c - (a+b) \\ &= g_k(\eta), & \eta_c - (a+b) < y < \eta_c + (a+b) \\ &= 0, & \eta_c + (a+b) < y < L_y \end{aligned}$$

という関数を展開する（図3参照）。この展開は式(4)となり，スパン L_y に亘って有効となる。

$$h_k(\xi) = \sum_{j=1}^{N_s} \gamma_{kj} \sin \frac{j\pi}{L_y} y \quad \dots \dots \dots (4)$$

3 開口部の境界条件の導入法

y 軸上で式(4)の開口（せん断方向或は曲げ方向）を生じさせつつ断面力は完全に連続する（周辺は単純支持）様なたわみ解は理論的に導き得た。従って設定した開口 $h_k(y)$ は、両側の板の連続部 ($0 < y < \eta_c - (a+b)$) と ($\eta_c + (a+b) < y < L_y$) においてはフーリエ級数 N_s 項までの精度として連続の境界条件が自動的に満足されている。

亀裂構成法は，式(5)に示す断面力 M_x 及び R_x の二乗積分値（完全開口部（ $\eta_c - a < y < \eta_c + a$ ）のみで積分）が最小に成るように条件を設定する。すなわち，せん断方向の開口関数 $g_{v_k}(y)$ （拡張して $h_k(y)$ ）の未定係数 μ_{v_k} と曲げ方向の開口関数 $g_{G_k}(y)$ の未定係数 μ_{G_k} ($k = 1 \sim N_c = 40$ 、合計 80 個) で偏微分して 0（即ち断面力最小という）になるように最小二乗法を活用する。

$$\left[\int_{\eta_c-a}^{\eta_c+a} R_x^2 dx + \int_{\eta_c-a}^{\eta_c+a} M_y^2 dy \right]_{\min} \dots \dots (5)$$

たわみ w_1, w_2 は解析的に導いたものを用いるが，式(5)の最小二乗法による 80 元の行列の行列式を 0 にするような固有値を繰り返し計算で導くことになる。なお，Process zone 相当部に拘束は設けない。

4 結果

板上 ($L_y=100\text{cm}$ ， $2L_x=100\text{cm}$) に亀裂中心： $L_{x1}=80\text{cm}$ ， $L_{x2}=20\text{cm}$ ，実開口部長さ： $2a=30\text{cm}$ ，

Process zone： $b=5\text{cm}$ の直線状亀裂 1 本を中心線上に持つ解の一例を図4，5に示す。

参考文献；1) R. Solecki: Bending Vibration of a Simply Supported Rectangular Plate with a Crack Parallel to One Edge, E.F.M.Vol.18, No.6, pp.111-2228.

2) 土山、国富、中川、藤井；亀裂を含む長方形板の自由振動解析、平 15・土木学会中部・概要集 -51。

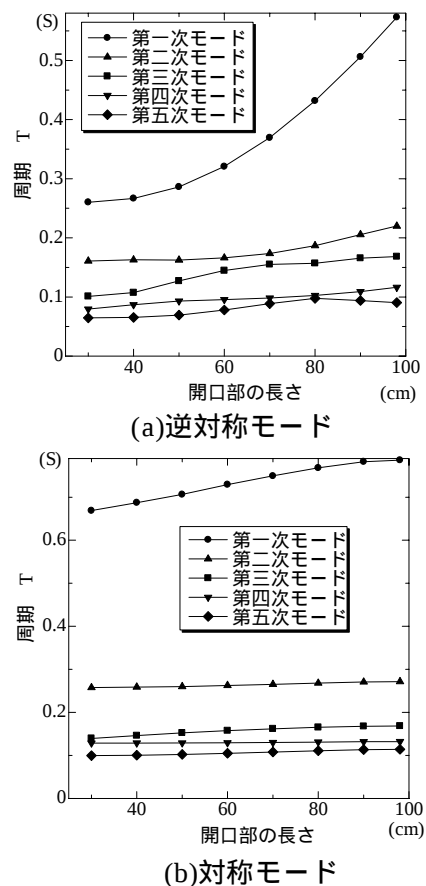


図4 開口部長変化と周期の関係

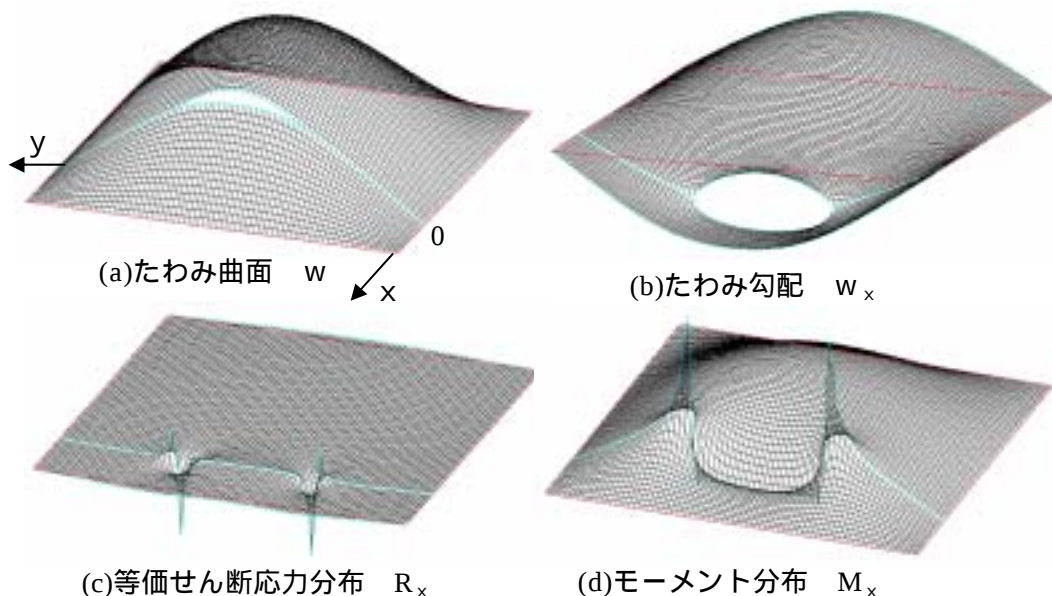


図5 亀裂を含む板の振動モードと断面力図