B-splineソリッド要素法を用いた等方性厚板の自由振動解析

大同工業大学大学院　学生員　○名木野　晴暢
大同工業大学　都市環境デザイン学科　正員　水澤　富作
北海道大学大学院工学研究科　正員　三上　隆

1. まえがき　近年，構造物の大型化，長大化にともない比較的厚い平板や極厚板が用いられる機会が増えている．厚板構造要素では，板厚の増大にともない，厚さ方向のひずみや応力が無視できなくなり，また面外せん断変形の影響も顕著に現れてくるため，これらの影響を考慮できる3次元弾性論に基づく解析が必要になる．しかしながら，3次元解析では計算規模に制約を受けるので，系の未知数を低減できる数値安定性の高い数値解析法の開発が重要な課題になっている．

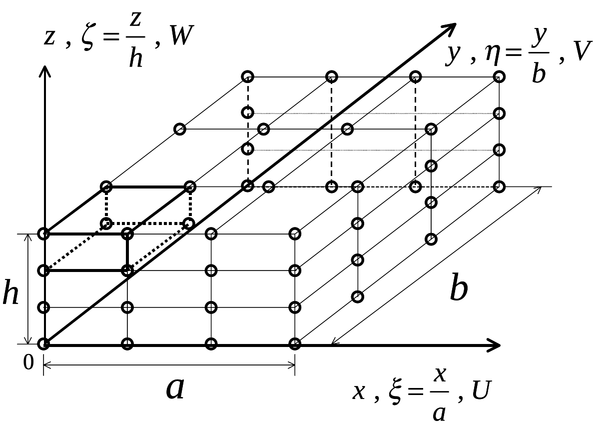

図-1　厚板と無次元直交座標系

Srivivasら[4]は，厳密解法を用いて周面単純支持された厚板の自由振動解析を行っている．一方，Ritz法[6), 5), 7)]，DQ法[3)]や節点プリズム法[1)]が，任意の境界条件を有する厚板の振動解析に適用されている．また，水澤ら[2)]と著者ら[8)]は，半数値解析法であるspline prism法を用いて，厚板の振動解析を行っているが，境界条件に制約が見られる．

本研究では，任意の境界条件を取り扱えるB-splinソリッド要素法を開発する．この方法は，変位場の3方向にB-spline関数を仮定した新しい離散化手法であり，spline次数を変化させるだけで，高次の要素モデルが容易に導くことができる．本手法を用いて，任意の境界条件を有する等方性厚板の振動解析を行い，解の収束性，精度比較やロッキング照査について検討し，本手法の有用性について検討を行っている．

2. 解析手法　ここでは，3次元弾性論とポテンシャルエネルギー最小の原理を用いて，**図-1**に示すB-splinソリッド要素を導く．また，式の定式化にあたり，以下に示す無次元直交座標系（ξ,η,ζ）を用いる．ここで，a,b,hはそれぞれ厚板の幅，長さと厚さである．

$$\xi = x/a\ ,\ \eta = y/b\ ,\ \zeta = z/h \qquad \cdots(1)$$

B-splineソリッド要素内で仮定されるξ,η,ζ方向の変位関数U,V,Wは，それぞれ次式で仮定する．

$$\left.\begin{aligned}
U(\xi,\eta,\zeta) &= \sum_{m=1}^{i_x}\sum_{n=1}^{i_y}\sum_{l=1}^{i_z} A_{mnl}\cdot N_{m,k}(\xi)\cdot N_{n,k}(\eta)\cdot N_{l,k}(\zeta)\\
V(\xi,\eta,\zeta) &= \sum_{m=1}^{i_x}\sum_{n=1}^{i_y}\sum_{l=1}^{i_z} B_{mnl}\cdot N_{m,k}(\xi)\cdot N_{n,k}(\eta)\cdot N_{l,k}(\zeta)\\
W(\xi,\eta,\zeta) &= \sum_{m=1}^{i_x}\sum_{n=1}^{i_y}\sum_{l=1}^{i_z} C_{mnl}\cdot N_{m,k}(\xi)\cdot N_{n,k}(\eta)\cdot N_{l,k}(\zeta)
\end{aligned}\right\} \qquad \cdots(2)$$

ここで，$N_{m,k}(\xi), N_{n,k}(\zeta), N_{l,k}(\zeta)$は正規化された B-spline，$A_{mnl}$等は未定係数，$i_x = k-1+M_x$，$i_y = k-1+M_y$，$i_z = k-1+M_z$である．$M_x$，$M_y$と$M_z$はそれぞれ$\xi,\eta,\zeta$方向の B-spline ソリッド要素の分割数である．

厚板の全ポテンシャルエネルギー$\prod$は，ひずみエネルギーU_pと運動エネルギーTを用いて次式で与えられる．

$$\prod = U_p - T \qquad \cdots(3)$$

したがって，ポテンシャルエネルギー最小の原理を用いれば，次式の固有方程式が得られる．

$$\left(\ [K]_{mnlijs} - \omega^2 [M]_{mnlijs}\ \right)\{\Delta\}_{mnl} = 0 \qquad \cdots(4)$$

ここで，$[K]_{mnlijs}$は剛性マトリックス，$[M]_{mnlijs}$は質量マトリックスであり，ω(rad/sec)は円振動数である．また，$[K]_{mnlijs}$と$[M]_{mnlijs}$は，正値対称性を有し，その大きさは，$3\times i_x \times i_y \times i_z$になる．

キーワード　B-splineソリッド要素法，3次元弾性論，等方性厚板，自由振動解析
〒457-0818　名古屋市南区白水町40　大同工業大学都市環境デザイン学科　TEL 052-612-5571

3. 数値計算例及び考察 まず，本手法（BSSEM）の未知数について示す．**図-2** には，未知数の比較が示してある．ここで，比較に用いた FEM は，2 次の形状関数を有する 27 節点アイソパラメトリック要素である．これより，要素分割数の増大にともない，高次の B-splin ソリッド要素を用いても，本手法の未知数が 50%以下に低減できる．

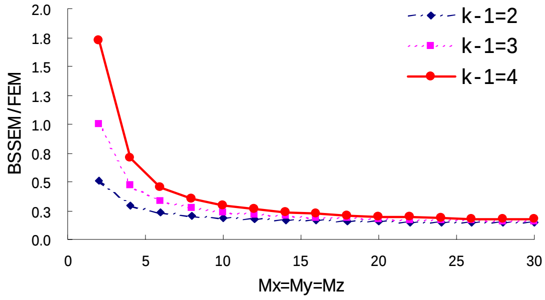

図-2 未知数の比較

3.1 本手法の収束性と精度比較 振動数パラメータは，$n^* = \omega b^2/\pi^2\sqrt{\rho h/D}$ で定義し，$D = Eh^3/12(1-\upsilon^2)$ は板剛性である．また，厚板の境界条件は，CS-FS のように表し，それぞれ ξ 軸に垂直な 2 つ境界面（$\xi = 0, 1$）で固定面（C），単純支持面（S）であり，η 軸に垂直な 2 つの境界面（$\eta = 0, 1$）で自由面（F），単純支持面（S）に相当している．

表-1 には，周面固定された正方形厚板（ν=0.3）の n^* の収束性に与える要素分割数 $M_x = M_y$ の影響が示してある．ここで，spline 次数 k-1 は，4 に仮定し，厚さ方向の分割数 M_z は 4 に固定して，$M_x = M_y$ を 2 から 16 まで変化させている．これより，本手法を用いれば，$M_x = M_y$ の増大にともない一様な収束性が示され，Liew らの解 [6] と一致した結果が得られている．

表-1 周面固定された正方形厚板の n*の収束性に与える要素分割数の影響：h/a=0.5,b/a=1.0, k-1=4,Mz=4,

h/a	Mx=My	Mz	modes 1st	2nd	3rd	4th	5th
0.5	4	4	1.552	2.442	2.442	2.517	2.517
	8	4	1.550	2.440	2.440	2.515	2.515
	12	4	1.550	2.440	2.440	2.515	2.515
	16	4	1.550	2.440	2.440	2.515	2.515
	Liew et al.[6]		1.550	2.440	2.440	2.515	2.515

表-2 には，SS-SS，CC-CC，CF-FF を有する正方形厚板の精度比較が示してある．ここで，板厚比 h/a は 0.1 から 0.5 まで変化させている．また，比較のために，Srinivas らの厳密解 [4] および Liew ら [6]，Zhou ら [7]，板倉 [5] と McGee ら [10] の数値解も示してある．これより，本手法で求めた値は，境界条件や板厚比に関わらず，他の数値解と非常によく一致した結果を示している．

表-2 正方形厚板の n*の精度比較：b/a=1.0, k-1=4, 12×12×4

B.C	h/a	Solution method	modes 1st	2nd	3rd	4th	5th
SS-SS	0.1	**Present**	**1.9342**	**4.6222**	**4.6222**	**6.5234**	**6.5234**
		Srinivas et al.[4]	1.9342	4.6222	4.6222	-	-
		Liew et al.[6]	1.9342	4.6222	4.6222	6.5234	6.5234
	0.2	**Present**	**1.7758**	**3.2617**	**3.2617**	**3.8991**	**3.8991**
		Srinivas et al.	1.7757	-	-	3.8991	3.8991
		Liew et al.	1.7758	3.2617	3.2617	3.8991	3.8991
	0.5	**Present**	**1.2590**	**1.3047**	**1.3047**	**1.8451**	**2.3312**
		Srinivas et al.	1.2590	-	-	1.8451	-
		Liew et al.	1.2590	1.3047	1.3047	1.8451	2.3312
CC-CC	0.1	**Present**	**3.3212**	**6.3453**	**6.3453**	**8.9025**	**10.498**
		Liew et al.[6]	3.3215	6.3457	6.3457	8.9030	10.498
		Zhou et al.[7]	3.3176	6.3389	6.3389	8.8943	10.488
	0.2	**Present**	**2.7266**	**4.7732**	**4.7732**	**6.2738**	**6.2738**
		Liew et al.	2.7261	4.7725	4.7725	6.2735	6.2735
		Zhou et al.	2.7241	4.7696	4.7696	6.2722	6.2722
	0.5	**Present**	**1.5496**	**2.4397**	**2.4397**	**2.5151**	**2.5151**
		Liew et al.	1.5496	2.4396	2.4396	2.5151	2.5151
		Zhou et al.	1.5488	2.4389	2.4389	2.5145	2.5145
CF-FF	0.1	**Present**	**0.34869**	**0.81854**	**2.0433**	**2.2093**	**2.5882**
		Itakura[5]	0.34895	0.82050	2.0457	2.2149	2.5908
	0.2	**Present**	**0.34006**	**0.74738**	**1.1066**	**1.7938**	**2.2856**
		Itakura	0.34034	0.74846	1.1095	1.7964	2.2868
		McGee et al.[10]	0.34132	0.74367	1.1130	1.7929	2.4001
	0.5	**Present**	**0.29733**	**0.44460**	**0.52618**	**1.0657**	**1.1084**
		McGee et al.	0.29852	0.44762	0.52500	1.0678	1.1124

3.2 薄板問題への適用 **表-3** には，本手法の薄板解析への適用結果が示してある．ここで，spline 次数は，5 とし，厳密積分を採用している．これより，板厚比 $h/a = 0.001$ までロッキングを緩和した結果が得られている．

表-3 薄板解析への適用：b/a=1.0, k-1=5, 14×14×2

h/a	Method	modes 1st	2nd	3rd	4th	5th	6th
0.01	**Present**	**1.9999**	**4.9999**	**4.9999**	**7.9996**	**9.9998**	**9.9998**
0.001	**Present**	**1.9999**	**4.9999**	**4.9999**	**7.9996**	**9.9998**	**9.9998**
0.0001	**Present**	**2.2177**	**5.1102**	**5.1268**	**8.0941**	**10.079**	**10.088**
3D,h/a=0.01	Liew et al.[6]	1.9993	4.9956	4.9956	7.9888	9.9826	9.9826
3D,h/a=0.001	Zhou et al.[7]	1.9972	4.9999	4.9999	7.9996	9.9995	9.9995
CPT	Leissa[9]	2.0000	5.0000	5.0000	8.0000	10.000	10.000

4. まとめ 本研究で得られた結果をまとめれば，以下の通りである．1）本手法の未知数は，FEM と比較して，50%以下に低減できる．2）本手法は，要素分割数の増大にともない，n^* の一様な収束状態を示している．3）本手法により求めた n^* は，他の数値解析法により求められた厳密解や数値解と非常によく一致している．4）本手法を用いれば，板厚比 $h/a = 0.001$ までロッキングを緩和した解が得られる．

参考文献 1)林ら：構造工学論文集, 44 A, pp. 339-348, 1998.2) 水澤ら：構造工学論文集, 39 A, pp. 1-12, 1993.3) Liew：Journal of Sound and Vibration,Vol,220(4), pp.577-599,1999.4) Srinivas: Journal of Sound and Vibration,Vol,12(2),pp.187-199,1970. 5)板倉:構造工学論文集, Vol. 41B, pp. 297-304, 1995.6)Liew: Int,J.Solids and Structures,Vol,30(24), pp.3357-3379,1993.7)Zhou：Int,J.Solids Struct,Vol,39, 6339-6353,2002.8) 名木野ら：応用力学論文集, Vol. 6 , pp. 321-330, 2003. 9) Leissa: Journal of Sound and Vibration,Vol,31(3),pp. 257-293,1973. 10) McGee: Journal of Sound and Vibration 144(2),pp.305-322,1991.