

## Spline 選点最小二乗法を用いた Mindlin 板の振動解析

大同工業大学大学院 学生員 後藤大輔 大同工業大学 正員 水澤富作

**1. はじめに** 3元連立偏微分方程式で表される Mindlin 板の振動解析では、等価な汎関数と要素内で仮定される区分的多項式に基づく有限要素法が多用されている。一方、要素分割に依存しない各種のメッシュレス法<sup>1)</sup>が開発され、平板解析への適用についても研究されている。この方法は、メッシュレス法である古典的な Ritz-Galerkin 法と比較して、移動最小二乗法や Particle 法に基づく重み付き残差離散化法<sup>1)</sup>である。

水澤らは、微分方程式の数値的解析法として、Lagrange 多項式を導関数の補間式に適用した Differential quadrature 法を用いた平板の振動解析を行っている<sup>2)</sup>。この方法は、差分法と選点法を一般化したメッシュレス法であるが、係数行列が非対称になり、また離散点の取り方により、解の不安定性が現れる。

本研究では、spline 関数を基底関数に仮定する選点最小二乗法<sup>3)</sup>を用いた Mindlin 板の振動解析を行い、解の収束性や解析精度に与えるスプライン次数や離散点の数などの影響について検討を行っている。

**2. 式の定式化** 2階の3元連立偏微分方程式で表され Mindlin 板の運動方程式は、Levy 法を適用すれば、3元連立常微分方程式で表される。ここでは、spline 関数を基底関数に仮定した選点最小二乗法の定式化を示す。1次元の線形境界値問題は、微分演算子  $L, B$  を用いて、次式で表される。

$$L(w) = q(y) \quad \text{領域} [0 \leq y \leq b], \quad B(w) = g(y) \quad \text{境界} (y = 0, y = b) \tag{1}$$

ここで、 $w$  は変位であり、 $q(y), g(y)$  は、与えられた関数である。したがって、領域残差  $R_L$  と境界残差  $R_B$  は、それぞれ次式で表される。

$$R_L = L(w) - q(y), \quad R_B = B(w) - g(y) \tag{2}$$

これらの残差を領域内の選点 ( $N$  個) と境界点 ( $M$  個) について求めると、次式で示される。

$$R_L(y_i) = L(w_i) - q(y_i) \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad R_B(y_{N+j}) = B(w_{N+j}) - g(y_{N+j}); \quad j = 1, 2, \dots, M \tag{3}$$

独立した3つの変位関数  $w, \varphi_x, \varphi_y$  は、B-spline 関数を用いて、それぞれ次式で仮定する。

$$w = \sum_{m=1}^N C_m N_{m,k}(y), \quad \varphi_x = \sum_{m=1}^N D_m N_{m,k}(y), \quad \varphi_y = \sum_{m=1}^N E_m N_{m,k}(y); \quad N = m_y + k - 2 \tag{4}$$

ここで、 $N_{m,k}(y)$  は、正規化された B-spline 関数であり、 $m_y$  と  $k-1$  は、それぞれ区分点の数と spline 次数である。また、 $C_m, D_m, E_m$  は、未定係数である。したがって、式(4)を式(3)に代入して、これをマトリックス表示すると、次式になる。

$\{R\} = \{R_L\} + \{R_B\} = [Z]\{C\} - \{P\}$  (5)  
係数マトリックス  $[Z]$  の大きさは、 $3N \times 3(m_y + M)$  になり、また  $3N \leq 3(m_y + M)$  になるので、 $[Z]$  は長方形マトリックスになる場合もある。

また、 $\{C\}^T = \{C_1, C_2, \dots, C_N, D_1, D_2, \dots, D_N, E_1, E_2, \dots, E_N\}$  である。

式(5)で与えられる残差の二乗誤差  $I_d$  は、最小二乗法を適用すると、次式で与えられる。

$$I_d = \sum_{i=1}^{m_y} [R_L(C_m, D_m, E_m, y_i)]^2 + \sum_{i=m_y+1}^{m_y+M} [R_B(C_m, D_m, E_m, y_i)]^2 = \{R\}^T \{R\} \tag{6}$$

したがって、式(6)を極値化すれば、次式が導ける。

$$\frac{\partial I_d}{\partial \{C\}} = [Z]^T [Z] \{C\} - [Z]^T \{P\} = [K] \{C\} - \{F\} = 0 \tag{7}$$

ここで、 $[K] = [Z]^T [Z]$  は、対称マトリックスであり、その大きさは、 $3N \times 3N$  になる。

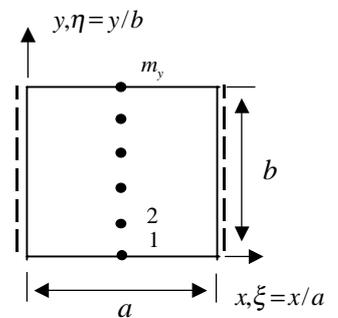


図-1 長方形 Mindlin 板

キーワード vibration, Mindlin plate, spline, collocation least square method

〒457-8532 名古屋市南区白水町 40 都市環境デザイン学科 電話 052-612-5571

図 - 1 に示すように、y 軸に平行な 2 辺が単純支持された長方形 Mindlin 板の運動方程式は、調和振動を仮定し、Levy 法と無次元直交座標系 ( $\xi = x/a, \eta = y/b, w' = w/h$ ) を用いれば、次式で与えられる。

$$w' = \sum W(\eta) \sin m\pi\xi \quad \psi_x = \sum X(\eta) \cos m\pi\xi \quad \psi_y = \sum Y(\eta) \sin m\pi\xi \tag{8}$$

$$6\kappa(1-\nu)(a/h)^2 \{[(m\pi)^2 W - (a/b)^2 W''] + (a/h)\{(m\pi)X - (a/b)Y\}\} = (\rho h/D)\omega^2 a^4 W \tag{9-1}$$

$$\frac{(1-\nu)}{2} [-(m\pi)^2 X + (a/b)^2 X''] + \frac{(1+\nu)}{2} [-(m\pi)^2 X + (a/b)(m\pi)Y'] - 6\kappa(1-\nu)[(b/h)^2(a/b)^2 X + (b/h)(a/b)(m\pi)W] \tag{9-2}$$

$$= -(\rho h/12D)\omega^2 a^4 (h/a)^2 X$$

$$\frac{(1-\nu)}{2} [-(m\pi)^2 Y + (a/b)^2 Y''] + \frac{(1+\nu)}{2} [(a/b)(-m\pi)X' + (a/b)Y''] - 6\kappa(1-\nu)(a/h)^2 [Y + (h/b)W'] \tag{9-3}$$

$$= -(\rho h/12D)\omega^2 a^4 (h/a)^2 Y$$

また、 $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$  は円振動数、 $\rho$  は密度、 $h$  は板厚、 $\nu$  はポアソン比、 $\kappa$  はせん断弾性係数である。

先に述べた選点最小二乗法を用いて、1 変数で書き換えられた上記の連立常微分方程式と x 軸に平行な 2 辺で与えられた境界条件(固定、単純支持、自由辺)は、線形代数方程式で表される。なお、数値計算では、spline 次数は、 $k-1=3$  に仮定している。

**3. 数値計算例および考察**

図 - 2 には、他の相対する 2 辺が自由な正方形板の 1 次と 7 次の振動数パラメータの収束性に与える離散点の数  $m_y$  の影響が示してある。ただし、振動数パラメータは、Spline 帯板法 (SSM)<sup>4)</sup> で求めた解に対する相対誤差 (%) で示してある。また幅厚比は、 $b/h=10$  に仮定している。

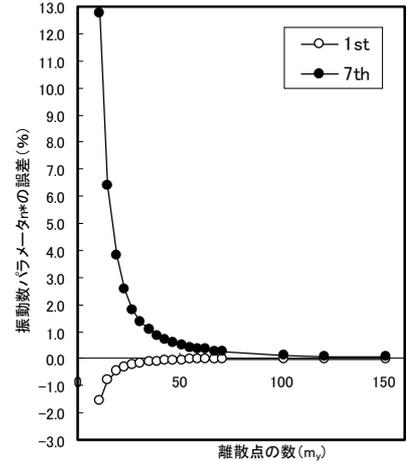


図-2 振動数パラメータの収束性; SS=FF,a/b=1.0,b/h=10

表 1 種々の境界条件と幅厚比を有する Mindlin 板の振動数パラメータの精度比較:  $a/b=1.0, m_y=51$

境界条件	b/h	Modes					
		1st	2nd	3rd	4th	5th	6th
C-C	5	22.31	39.76	44.48	58.36	65.57	70.31
	DQM	22.31	39.76	44.47	58.36	65.57	70.29
	SSM	22.31	39.76	44.47	58.36	65.57	70.29
	10	26.65	49.07	59.15	78.71	86.72	101.2
	DQM	26.65	49.06	59.12	78.68	86.72	101.2
	SSM	26.65	49.06	59.12	78.68	86.72	101.2
	CM	26.64	49.06	59.10	78.68	86.71	
	100	28.91	54.69	69.20	94.38	102.0	128.7
	DQM	28.90	54.71	69.20	94.39	102.0	128.7
	SSM	28.92	54.67	69.19	94.36	102.0	128.7
CM	28.92	54.68	69.19	94.35	102.0		
C-F	5	11.35	25.71	32.85	44.62	48.38	60.69
	DQM	11.35	27.71	32.83	44.62	48.37	60.62
	SSM	11.35	27.71	32.83	44.62	48.37	60.62
	10	12.24	30.39	38.62	55.73	62.68	78.50
	DQM	12.25	30.39	38.60	55.75	62.65	78.43
	SSM	12.25	30.39	38.61	55.74	62.65	78.43
	100	12.67	32.91	41.63	63.15	72.21	90.48
	DQM	12.96	32.88	41.60	63.25	72.17	90.45
	SSM	12.68	33.01	41.65	62.89	72.24	90.43
	S-F	5	10.69	23.12	32.67	43.48	45.22
DQM		10.69	23.12	32.66	43.48	45.21	60.56
SSM		10.69	23.12	32.66	43.48	45.21	60.56
10		11.37	26.14	38.27	53.19	55.60	78.34
DQM		11.37	26.14	38.26	53.20	55.58	78.27
SSM		11.37	26.14	38.26	53.20	55.58	78.27
100		11.69	27.72	41.15	58.98	61.76	90.15
DQM		11.70	27.71	41.14	59.00	61.71	90.13
SSM		11.68	27.72	41.15	58.96	61.75	90.11
F-F		5	8.977	14.08	29.10	31.23	35.91
	DQM	8.977	14.08	29.10	31.22	35.89	49.45
	SSM	8.977	14.08	29.10	31.22	35.89	49.45
	10	9.438	15.38	33.85	36.35	42.76	62.05
	DQM	9.439	15.38	33.84	36.33	42.76	62.08
	SSM	9.439	15.38	33.84	36.33	42.76	62.08
	100	9.627	16.10	36.64	38.92	46.67	70.56
	DQM	9.633	15.97	36.64	38.88	46.79	70.79
	SSM	9.628	16.11	36.64	38.91	46.66	70.54

DQM: Differential quadrature法<sup>3)</sup>, SSM: Spline strip 法<sup>4)</sup>, CM: Collocation法<sup>5)</sup>

これより、 $m_y$  の増大させると、一定値への安定した収束状態が得られている。また、高次の振動数パラメータ  $n^* = \omega^2 \sqrt{\rho h/D}$  は、離散点の数を 40 程度にすれば、1%以内の精度が得られている。また、表 1 には、種々の境界条件と幅厚比を有する正方形 Mindlin 板の振動数パラメータの精度比較が示してある。これより、本手法で求めた値は、他の数値解析法で求めた解と、良く一致した結果を示している。

**4. まとめ**

本文で得られた結果は、以下のように纏められる。(1) spline 選点最小二乗法は、数値積分を必要とせず、また対称な係数マトリックスが得られるので、数値安定性の高い解析結果が得られている。(2) 任意の境界条件と幅厚比を持つ Mindlin 板の振動解析は、精度の高い解析結果を示している。

**参考文献**

1) Belytschko, T. et. al.: Comput. Meth. Appl. Mech. Eng., Vol. 139, pp. 3-47, 1996. 2) 近藤他: 応用力学論文集, Vol. 3, pp. 193-201, 2000. 3) Mizusawa, T. and Kajita, T.: Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 16, pp. 897-907, 1982. 4) Mizusawa, T.: Comput. Struct., Vol. 46, pp. 451-463, 1993. 5) Mikami, T. and Yoshimura, J.: Comput. Struct., Vol. 18, pp. 425-431, 1984.