

Spline 選点法を用いた周辺単純支持厚板の振動解析

大同工業大学 正会員 水澤富作 大同工業大学大学院 学生員 後藤大輔

1. はじめに 弾性直方体の振動問題は、2 階の 3 元連立偏微分方程式と 6 面で指定される境界条件で表される。エネルギー変分法に基づく Ritz 法や有限要素法を 3 次元厚板の振動解析に適用されているが、系の未知数の数が急増し、数値積分に時間がかかり、また基底関数の仮定が解析精度に大きな影響を与える。一方、連立微分方程式を直接数値的に解く解法として、差分法、選点法¹⁾や Differential quadrature 法²⁾などが挙げられるが、弾性論に基づく厚板の振動解析への適用が比較的少なく、導関数や試験関数の補間関数の特性について検討する必要があると思われる。

水澤らは、連立微分方程式の数値的解析法として、Lagrange 多項式を導関数の補間式に適用した Differential quadrature 法を用いた

Mindlin 板の振動解析を行っている²⁾。この方法は、差分法と選点法を一般化したメッシュレス法であるが、係数行列が密表列になり、また離散点の取り方や自由の境界条件を含む問題では、解の不安定性が現れる。

本研究では、spline 関数を基底関数に仮定する選点法を用いて、2 方向に固有関数を Fourier 級数展開して得られた 3 元連立常微分方程式で表される周辺単純支持された厚板の振動解析を行い、解の収束性や解析精度に与える離散点の数などの影響について検討している。

2. 式の定式化 2 階の 3 元連立偏微分方程式で表される厚板は、4 辺をダイヤフラム型の単純支持を仮定した Navier 法を適用すれば、厚さ方向の変数に関する 2 階の 3 元連立常微分方程式で表される。

ここでは、spline 関数を基底関数に仮定した選点法の定式化を示す。

1 次元の線形境界値問題は、微分演算子 L, B を用いて、次式で表される。

$$L(w) = q(z) \quad \text{領域} [0 \leq z \leq h], \quad B(w) = g(z) \quad \text{境界} (z = 0, z = h) \quad (1)$$

ここで、 w は変位であり、 $q(z), g(z)$ は、与えられた関数である。したがって、領域残差 R_L と境界残差 R_B は、それぞれ次式で表される。

$$R_L = L(w) - q(z), \quad R_B = B(w) - g(z) \quad (2)$$

これらの残差を領域内の選点 (N 個) と境界点 (M 個) について求めると、次式で示される。

$$R_L(z_i) = L(w_i) - q(z_i) \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad R_B(z_{N+j}) = B(w_{N+j}) - g(z_{N+j}); \quad j = 1, 2, \dots, M \quad (3)$$

独立した 3 つの変位関数 u, v, w は、B-spline 関数を用いて、それぞれ次式で仮定する。

$$u = \sum_{m=1}^N A_m N_{m,k}(z), \quad v = \sum_{m=1}^N B_m N_{m,k}(z), \quad w = \sum_{m=1}^N C_m N_{m,k}(z); \quad N = m_z + k - 2 \quad (4)$$

ここで、 $N_{m,k}(z)$ は、正規化された B-spline 関数であり、 m_z と $k-1$ は、それぞれ区分点の数と spline 次数である。また、 A_m, B_m, C_m は、未定係数である。したがって、式 (4) を式 (3) に代入して、これをマトリックス表示すると、次式になる。

$$\{R\} = \{R_L\} + we\{R_B\} = [Z]\{C\} - \{P\} \quad (5)$$

係数マトリックス $[Z]$ の大きさは、 $3N \times 3(m_z + M)$ になり、また $3N = 3(m_z + M)$ になるので、 $[Z]$ は正方形マトリックスになる。ただし、 $\{C\}^T = \{A_1, A_2, \dots, A_N, B_1, B_2, \dots, B_N, C_1, C_2, \dots, C_N\}$ である。また、 we は、内部残差に対する境界残差の重み係数であり、計算では 10^4 に仮定している。

図 1 に示す 6 面体で表される長方形厚板の上、下面を除く、周面がダイヤフラム型の単純支持であると

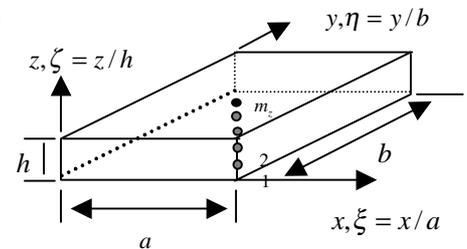


図-1 長方形厚板

キーワード vibration, spline, collocation method, thick plate, elasticity theory

〒457-8532 名古屋市南区白水町 40 都市環境デザイン学科 電話 052-612-5571

仮定すると、変位関数 u, v, w は、2 方向に固有関数を Fourier 級数展開し、厚さ方向の変位に spline 関数を用いて、それぞれ次式で表される。

$$u(\xi, \eta, \zeta) = \sum \sum \sum A_{mnl} N_{l,k}(\zeta) \cos m\pi\xi \times \sin n\pi\eta, \quad v(\xi, \eta, \zeta) = \sum \sum \sum B_{mnl} N_{l,k}(\zeta) \sin m\pi\xi \times \cos n\pi\eta, \quad w(\xi, \eta, \zeta) = \sum \sum \sum C_{mnl} N_{l,k}(\zeta) \sin m\pi\xi \times \sin n\pi\eta \quad (6)$$

ここで、 m, n は、それぞれ x 方向と y 方向に展開される固有関数の級数項である。また、調和振動を仮定した等方性直方体の自由振動方程式は、それぞれ x, y, z 方向の変位 u, v, w で表すと、無次元直交座標 ($\xi = x/a, \eta = y/b, \zeta = z/h$) を用いて、次式の 3 元連立偏微分方程式で与えられる。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + (a/b)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + (a/h)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} + \frac{1}{1-2\nu} \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + (a/b) \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} + (a/h) \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \zeta} \right\} + \frac{\rho\omega^2}{G} a^2 u = 0 \quad (7)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + (a/b)^2 \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} + (a/h)^2 \frac{\partial^2 v}{\partial \zeta^2} + \frac{1}{1-2\nu} \left\{ (a/b) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + (a/b)^2 \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} + (a/h)(a/b) \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \zeta} \right\} + \frac{\rho\omega^2}{G} a^2 v = 0 \quad (8)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + (a/b)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + (a/h)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2} + \frac{1}{1-2\nu} \left\{ (a/h) \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta \partial \xi} + (a/b)(a/h) \frac{\partial^2 v}{\partial \zeta \partial \eta} + (a/h)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2} \right\} + \frac{\rho\omega^2}{G} a^2 w = 0 \quad (9)$$

ここで、 ν, G は、それぞれポアソン比とせん断弾性係数であり、また ρ, ω は、密度と円振動数 (rad/sec) である。したがって、式(6)を上記の支配方程式に

代入すると、3 元連立常微分方程式に書き換えられる。また、板の上、下面に自由の境界条件 ($\sigma_z = 0, \tau_{xz} = 0, \tau_{yz} = 0$) が導入される。これらの連立微分方程式に、先に定式化した選点法を適用すれば、固有方程式である代数方程式が求められる。

3. 数値計算例および考察 表 1 には、幅厚比 $b/h=10$ である正方形板の振動数パラメータ $n^* = \omega b^2 \sqrt{\rho h / D}$ の収束性に与える厚さ方向の離散点 m_z の影響が示してある。また、比較のために、解析解³⁾と DQ 法⁴⁾、WE 法⁵⁾の数値解も示してある。これより、離散点を増加させると、 n^* は、一定値に向かう安定した収束状態が得られている。また、その収束値は、解析解や数値解と良く一致した結果を示している。

表 2 は、種々の幅厚比を有する正方形板の振動数パラメータ n^* の精度比較を示している。また、比較のために、解析解³⁾や数値解^{4,5,6)}も示してある。これより、比較的薄い板から極厚板まで、本手法で求めた値は、解析解や数値解と良く一致した精度の高い結果が得られている。

4. まとめ 本文で得られた結果を示すと、以下の通りである。(1) 本手法を用いれば、数値積分公式を用いずに連立微分方程式を解くことができる。(2) 離散点を増大数と、解の安定した収束状態が示され、またその収束値は、他の解析法による解と良く一致した結果を示している。(3) 数値積分公式を必要としないので、プログラミングが簡単である。

参考文献 1) Mikami, T. and Yoshimura, J.: *Comput. Struct.*, Vol. 18, pp. 425-431, 1984. 2) 近藤・水澤; *応用力学論文集*, Vol. 4, pp. 183-194, 2001. 3) Srinivas, S.他: *JSV*, Vol. 12, pp. 187-199, 1970. 4) Liew, K.M. and Teo, T.M.: *JSV*, Vol. 220, pp. 577-599, 1999. 5) Filipich, C.P.他: *JSV*, Vol. 212, pp. 599-610, 1998. 6) 高木、水澤: 平成 4 年度土木学会中部支部研究発表会, I-23, pp. 47-48, 1993.

表 1 正方形厚板の振動数パラメータ n^* の収束性に与える離散点の数 m_z の影響: $b/h = 10, \nu = 0.3$

m_z	Modes					
	1st	2nd	3rd	4th	5th	6th
9	(1,1,0)	(2,1,0)	(1,2,0)	(2,2,0)	(1,3,0)	(3,1,0)
9	18.76	44.84	44.84	68.93	84.06	84.06
13	18.94	45.27	45.27	69.58	84.86	84.86
17	19.01	45.43	45.43	69.81	85.13	85.13
21	19.03	45.50	45.50	69.92	85.26	85.26
25	19.05	45.53	45.53	69.97	85.33	85.33
29	19.06	45.56	45.56	70.01	85.37	85.37
33	19.06	45.57	45.57	70.03	85.40	85.40
37	19.07	45.58	45.58	70.05	85.42	85.42
41	19.07	45.59	45.59	70.06	85.43	85.43
45	19.08	45.60	45.60	70.07	85.44	85.44
49	19.08	45.60	45.60	70.07	85.45	85.45
53	19.08	45.60	45.60	70.08	85.45	85.45
55	19.09	45.60	45.60	70.08	85.45	85.45
3D-Exact ³⁾	19.09	45.62	45.62	70.10	85.49	85.49
3D-DQM ⁴⁾	19.09	45.65	45.65	70.14	85.49	85.49
WEM ⁵⁾	19.09	45.62	-	70.10	85.49	-

表 2 正方形厚板の振動数パラメータ n^* の精度比較: $m_z = 51, \nu = 0.3$

b/h	Modes					
	1st	2nd	3rd	4th	5th	6th
100	19.73	49.30	49.28	78.83	98.51	98.51
SLM ⁶⁾	19.73	49.30	49.30	78.84	98.51	98.51
3D-DQM ⁴⁾	19.73	49.30	49.30	78.80	98.43	98.43
10	19.09	45.60	45.60	70.08	85.45	85.45
3D-Exact ³⁾	19.09	45.62	45.62	70.10	85.49	85.49
3D-DQM ⁴⁾	19.09	45.65	45.65	70.14	85.49	85.49
WEM ⁵⁾	19.09	45.62	-	70.10	85.49	-
5	17.52	38.47	38.47	45.53	55.77	65.98
3D-DQM ⁴⁾	17.53	38.49	38.49	45.53	55.80	64.39
SLM ⁶⁾	17.53	38.48	38.48	45.53	55.79	66.00
WEM ⁵⁾	17.53	38.48	38.48	-	55.79	66.00
2	12.42	-	-	18.21	23.00	23.00
3D-DQM ⁴⁾	12.43	12.88	12.88	18.21	23.01	23.01