地中構造物の多入力地震応答解析

応用地質　正会員　吉田 望　土木研究所　正会員　白戸真大

1　はじめに

地中構造物は地震時には自身で応答するというより周辺地盤の挙動につられて挙動する。このような構造物の解析法として応答変位法がよく用いられる。すなわち，地盤の最大変位などを自由地盤と構造物をつなぐばね（相互作用ばね）を介して構造物に作用させている。このように相互作用ばねを介して地盤の変位を構造物に作用させる方法は地中構造物の実用的な計算では良く行われ，動的な問題ではPenzien モデルやその改良したものなどが代表的なものといえる。

ところで，Penzien モデルなどでは地盤と構造物を一体として解く必要がある。しかし，地盤の挙動の解析には応力－ひずみ関係の複雑さから各種の独特のプログラムが作成されている。一方，構造物側の非線形の扱いにも各種の方法がある。一体解析を行おうとすればこれらフィールドの異なる二つの分野を合わせた解析コードが必要であるが，その様なコードは一般的とはいえない。

これに代わる方法として，地盤の挙動を独自に求め，これを構造物に入力する二段階に分離する方法が考えられる。後者の方法は多入力問題として位置づけることができる。本報告ではその方法について検討する。

2　多入力解析

複数の支持点から同時に入力を作用させる多入力問題に対する解析法として二つの方法が知られている。一つは Clough らの提案するもの[1)]で，全支持点で加速度を入力する。もう一つは筆者の一人らが提案したもの[2)]で基盤の加速度と基盤に対する相対変位を入力とする。前者は多入力点に対する静的な変位が必要であるなど計算の手間が複雑であり，また計算時間も多くかかるが，後者は外力項のみで処理出来ること，入力形態が杭などの地中構造物に向いていること等から，ここでは後者を用いる。

運動方程式は絶対変位表示で次のように書ける。

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}^t+\mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}^t+\mathbf{K}\mathbf{u}^t=\mathbf{0} \tag{1}$$

ここで，変位を基盤の変位（剛体変位）と基盤に対する相対変位に分離する。

$$\mathbf{u}^t=\begin{Bmatrix}\mathbf{u}_a^t\\ \mathbf{u}_b^t\end{Bmatrix}=\underbrace{\begin{Bmatrix}\mathbf{u}_a^R\\ \mathbf{u}_b^R\end{Bmatrix}}_{\text{剛体変位}}+\underbrace{\begin{Bmatrix}\mathbf{u}_a\\ \mathbf{u}_b\end{Bmatrix}}_{\text{相対変位}}\quad\begin{matrix}\text{自由点}\\ \text{加振点}\end{matrix} \tag{2}$$

添え字 a，b は自由点と加振点を表すが，多入力の問題なので加振点の相対変位 u_b も0ではないのが特徴である。これを式(1)に代入する。

$$\begin{bmatrix}\mathbf{M}_a & 0\\ 0 & \mathbf{M}_b\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{\mathbf{u}}_a+\ddot{\mathbf{u}}_a^R\\ \ddot{\mathbf{u}}_b+\ddot{\mathbf{u}}_b^R\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}\mathbf{C}_{aa} & \mathbf{C}_{ab}\\ \mathbf{C}_{ba} & \mathbf{C}_{bb}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\dot{\mathbf{u}}_a+\dot{\mathbf{u}}_a^R\\ \dot{\mathbf{u}}_b+\dot{\mathbf{u}}_b^R\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}\mathbf{K}_{aa} & K_{ab}\\ \mathbf{K}_{ba} & K_{bb}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\mathbf{u}_a+\mathbf{u}_a^R\\ \mathbf{u}_b+\mathbf{u}_b^R\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix} \tag{3}$$

このうち，自由な点の自由度成分のみを書き下すと次のようになる。

$$\mathbf{M}_a\ddot{\mathbf{u}}_a+\mathbf{C}_{aa}\dot{\mathbf{u}}_a+\mathbf{K}_{aa}\mathbf{u}_a=-\mathbf{M}_a\mathbf{I}_a\ddot{\mathbf{u}}_a^R-\mathbf{C}_{ab}\dot{\mathbf{u}}_b-\mathbf{K}_{ab}\mathbf{u}_b \tag{3}$$

なお，$\mathbf{K}_{aa}\mathbf{u}_a^R$ の様に剛体変位に対して0になる項は抜いている。また，減衰に関しては基盤に対する相対速度に比例するとして無視している項もある。

これが多入力解析の支配方程式であり，右辺の最後に多入力の影響を表す項がある以外は通常の運動方程式と同じである。

3　一体解析との違い

運動方程式として見れば，全体系も多入力解析も同じである。従って，一体解析と多入力解析とは同じ結果を与えそうに見えるが，以下で示すように実際にはそうではない。それは，通常の動的な解析では問題が完全に定義されていないので，例えば線形加速度法では応答加速度が増分区間で線形に変化する等の仮定を設けているからである。ここでは例としてNewmark のβ法を取り上げる。

全体の運動方程式を増分表示で表すと次式となる。

$$\mathbf{M}d\ddot{\mathbf{u}}+\mathbf{C}d\dot{\mathbf{u}}+\mathbf{K}d\mathbf{u}=-\mathbf{m}^T d\ddot{\mathbf{u}}_b \tag{4}$$

ここで，$\mathbf{m}^T=\mathbf{M}\mathbf{I}_b$ である。

この運動方程式を逐次積分法で解く。先と同様Newmark のβ法を適用すると，時刻 t の変位，速度は次のように表される。

$$\dot{\mathbf{u}}_t=\dot{\mathbf{u}}_{t-dt}+(1-\gamma)dt\ddot{\mathbf{u}}_{t-dt}+\gamma dt\ddot{\mathbf{u}}_t \tag{5a}$$

$$\mathbf{u}_t=\mathbf{u}_{t-dt}+dt\dot{\mathbf{u}}_{t-dt}+\left(\frac{1}{2}-\beta\right)(dt)^2\ddot{\mathbf{u}}_{t-dt}+\beta(dt)^2\ddot{\mathbf{u}}_t \tag{5b}$$

これを増分表示にすると次のようになる。

多入力地震応答，応答変位法，Penzien モデル
連絡先　　〒331-8688　埼玉県さいたま市北区土呂町2-61-5　応用地質(株)地震防災センター　ＴＥＬ048-661-9141

$$d\dot{\mathbf{u}} = dt\ddot{\mathbf{u}}_{t-dt} + \gamma dt d\ddot{\mathbf{u}}$$
$$d\mathbf{u} = dt\dot{\mathbf{u}}_{t-dt} + \frac{1}{2}(dt)^2\ddot{\mathbf{u}}_{t-dt} + \beta(dt)^2 d\ddot{\mathbf{u}} \qquad (6)$$

これを速度と加速度増分について解く。

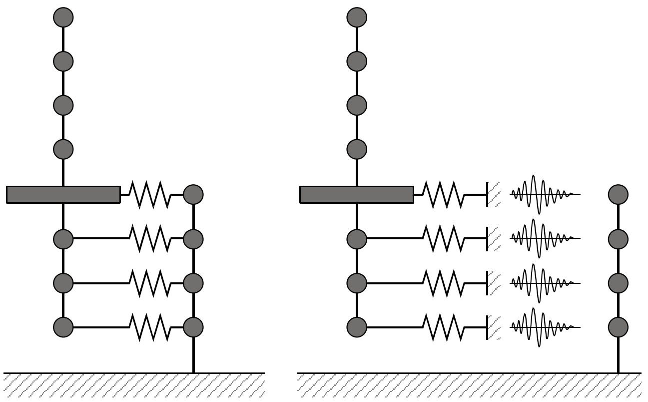
$$d\ddot{\mathbf{u}} = \frac{1}{\beta(dt)^2}d\mathbf{u} - \frac{1}{\beta dt}\dot{\mathbf{u}}_{t-dt} - \frac{1}{2\beta}\ddot{\mathbf{u}}_{t-dt} \qquad (7a)$$

$$d\dot{\mathbf{u}} = \frac{\gamma}{\beta dt}d\mathbf{u} + dt\left(1-\frac{\gamma}{2\beta}\right)\ddot{\mathbf{u}}_{t-dt} - \frac{\gamma}{\beta}\dot{\mathbf{u}}_{t-dt} \qquad (7b)$$

これを基礎式に代入すると，次の連立方程式が得られる。

$$[\frac{\mathbf{M}}{\beta dt^2} + \frac{\gamma\mathbf{C}}{\beta dt} + \mathbf{K}]d\mathbf{u} = \mathbf{M}\left(\frac{1}{\beta dt}\dot{\mathbf{u}}_{t-dt} + \frac{1}{2\beta}\ddot{\mathbf{u}}_{t-dt}\right)$$
$$+\mathbf{C}\left(\frac{\gamma}{\beta}\dot{\mathbf{u}}_{t-dt} - \left(1-\frac{\gamma}{2\beta}\right)dt\ddot{\mathbf{u}}_{t-dt}\right) - \mathbf{m}d\ddot{\mathbf{u}}_g \qquad (8)$$

この方程式を解くことにより $d\mathbf{u}$ が求まる。



(a) 一体モデル　　　　　　(b) 分離モデル

図1　一体解析と分離解析

この式は構造物の自由度と地盤の自由度の両方を含んでいる。ここで考えているのは図1に示すような一体モデルであるので，自由度の数は多入力の場合と同じである。そこで，前と同様に添え字 a，b を当て，この二種類の自由度を分離する。なお，時刻を表す添え字 $t\text{-}dt$ は自明なので削除している。分離して自由点のみを取り出し，整理すると次式となる。

$$\frac{\mathbf{M}_a}{\beta dt^2}d\mathbf{u}_a + \frac{\gamma}{\beta dt}\left(\mathbf{C}_{aa}d\mathbf{u}_a + \mathbf{C}_{ab}d\mathbf{u}_b\right) + \mathbf{K}_{aa}d\mathbf{u}_a + \mathbf{K}_{ab}d\mathbf{u}_b$$
$$= \mathbf{M}_a\left(\frac{1}{\beta dt}\dot{\mathbf{u}}_a + \frac{1}{2\beta}\ddot{\mathbf{u}}_a\right) + \mathbf{C}_{aa}\left(\frac{\gamma}{\beta}\dot{\mathbf{u}}_a - \left(1-\frac{\gamma}{2\beta}\right)dt\ddot{\mathbf{u}}_a\right)$$
$$+\mathbf{C}_{ab}\left(\frac{\gamma}{\beta}\dot{\mathbf{u}}_b - \left(1-\frac{\gamma}{2\beta}\right)dt\ddot{\mathbf{u}}_b\right) - \mathbf{m}d\ddot{\mathbf{u}}_g \qquad (9)$$

この式でさらに変位増分項を右辺に移せば運動方程式を変位増分に対して解くための基礎方程式が得られ次式のようになる。

$$\left(\frac{\mathbf{M}_a}{\beta dt^2} + \frac{\gamma}{\beta dt}\mathbf{C}_{aa} + \mathbf{K}_{aa}\right)d\mathbf{u}_a = -\frac{\gamma}{\beta dt}\mathbf{C}_{ab}d\mathbf{u}_b - \mathbf{K}_{ab}d\mathbf{u}_b$$
$$+\mathbf{M}_a\left(\frac{1}{\beta dt}\dot{\mathbf{u}}_a + \frac{1}{2\beta}\ddot{\mathbf{u}}_a\right) + \mathbf{C}_{aa}\left(\frac{\gamma}{\beta}\dot{\mathbf{u}}_a - \left(1-\frac{\gamma}{2\beta}\right)dt\ddot{\mathbf{u}}_a\right)$$
$$+\mathbf{C}_{ab}\left(\frac{\gamma}{\beta}\dot{\mathbf{u}}_b - \left(1-\frac{\gamma}{2\beta}\right)dt\ddot{\mathbf{u}}_b\right) - m\ddot{\mathbf{u}}_{g,t} \qquad (10)$$

次に，多入力問題を考える。前と同じように Newmark のβ法を適用すると，最終的に次の式が得られる。

$$\left(\frac{\mathbf{M}_a}{\beta dt^2} + \frac{\gamma}{\beta dt}\mathbf{C}_{aa} + \mathbf{K}_{aa}\right)d\mathbf{u}_a$$
$$= -[\mathbf{C}_{ab}]\{d\dot{\mathbf{u}}_b\} - [\mathbf{K}_{ab}]\{d\mathbf{u}_b\} + \mathbf{M}_a\left(\frac{1}{\beta dt}\dot{\mathbf{u}}_a + \frac{1}{2\beta}\ddot{\mathbf{u}}_a\right)$$
$$+\mathbf{C}_{aa}\left(\frac{\gamma}{\beta}\dot{\mathbf{u}}_a - \left(1-\frac{\gamma}{2\beta}\right)dt\ddot{\mathbf{u}}_a\right) - m\ddot{\mathbf{u}}_{g,t} \qquad (11)$$

両者を比較すると，左辺は同じで，右辺の減衰項が異なっている。異なっている部分のみをまとめると次のようである。

$$\text{一体型：}\mathbf{C}_{ab}\left(\frac{\gamma}{\beta}\dot{\mathbf{u}}_b - \left(1-\frac{\gamma}{2\beta}\right)dt\ddot{\mathbf{u}}_b - \frac{\gamma}{\beta dt}d\mathbf{u}_b\right)$$
$$\text{分離型：}-\mathbf{C}_{ab}d\dot{\mathbf{u}}_b \qquad (13)$$

両者の違いは，一体型では多入力点に相当する自由度でも変位が未知なので Newmark のβ法で仮定した補間式を使って予測しているのに対して，分離型では変位，速度とも既知とした事から生じていることが式の誘導から分かる。

4　まとめ

図1に示すような多入力解析と一体解析の支配方程式およびその解析法について検討した。その結果，以下のような結論が得られた。

同じ数値積分法を用いても両解析は同じ結果とはならない。これは，入力点の時間に関する変動の過程の違いから来ている。

一体型と同じ結果を得ようとすれば，変位入力以外に速度入力も必要である。ただし，相互作用ばねの減衰が無ければ変位入力だけで両者は同じ結果となるし，減衰が小さくてもほぼ同じ結果となる。さらに，外力項を変更することで一体解析と同じ結果を得ることも可能である。

参考文献

1)　Clough, R. W. and Penzien, J. (1975): Dynamics of Structures, McGraw-Hill Kogakusha, Tokyo
2)　田中勉，吉田望，亀岡裕行，長谷川豊（1983）：地中構造物の多入力解析，第38回土木学会年次学術講演会講演概要集，第1部，pp. 49-50