

位相スペクトルの不確定性を考慮した1自由度系のランダム振動

鉄道総合技術研究所 正会員 ○室野 剛隆
京都大学防災研究所 正会員 佐藤 忠信

1. まえがき

地震動の非定常性は位相スペクトルにより支配されていることはよく知られている。近年の耐震設計では、地盤や構造物が非線形応答することを前提にしており、従来のような位相をランダム位相として扱うことには無理があり、位相特性を反映し非定常性を有する地震動を取り扱う必要がある。著者らはこれまで、位相スペクトルのモデル化¹⁾²⁾³⁾および位相スペクトルに準拠した波形合成方法⁴⁾について一連の研究を進めてきた。これらの研究では、位相を群遅延時間という形で評価し、その平均値と標準偏差をモデル化している。最終的には、そのような確率特性を有する変数として群遅延時間（位相）が定義される。そこで、本研究では、ランダム振動論に位相スペクトルの不確定性を取入れる方法を提示する。さらに、最大応答値を推定し、応答スペクトルの推定が可能であることを示す。

2. 群遅延時間の確率特性

群遅延時間の平均値と標準偏差をマグニチュードや震央距離などにより定式化した。群遅延時間の確率分布特性については、 t 分布のように裾が大きい分布になることを確認している。ただし、位相と振幅とは1:1の関係があり、裾の部分の群遅延時間に対応する振動数では、振幅が非常に小さくなっており、例えば裾の部分の群遅延時間を無視すると、ガウス分布に近い分布形状となる。また、群遅延時間は振動数軸に沿ってある相関性を有している可能性が高く、簡単な例として著者らは下記のような自己相関関数を有するものと仮定している。

$$R(\omega_{k-1}, \omega_k) = \sigma_{tgr,k}^2 \cdot \exp\left(-\frac{|\omega_{k-1} - \omega_k|}{b}\right) \quad (1)$$

ここに、 $\sigma_{tgr,k}^2$ は離散振動数 k における群遅延時間の標準偏差である。上記のことを前提に、本研究では、群遅延時間を下記のような確率分布に従うパラメータとしてモデル化する。

$$p(\xi^{(j)}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{j}{2}} |\mathbf{S}^{(j)}|^{\frac{1}{2}}} \exp\left\{-\frac{1}{2} (\xi^{(j)} - \mu^{(j)})^T \mathbf{S}^{(j)-1} (\xi^{(j)} - \mu^{(j)})\right\} \quad (2)$$

ここに、 $\xi^{(j)} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_j)^T$ 、 $\mu^{(j)} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_j)^T$ で、 $\xi(\omega_i)$ は離散振動数 ω_i における群遅延時間、 $\xi_j = \xi_j \Delta\omega$ 、 $\mu_j = \bar{\mu}_j \Delta\omega$ で $\bar{\mu}_j$ は群遅延時間の平均値、 $\mathbf{S}$ は共分散マトリクスである。

3. 合成波形の定式化

まず、入力地震動を各フーリエ次数に分解し、式(1)のように表現する。

$$\ddot{z}(t) = \sum_{i=1}^{N_f} z_k(t) = \sum_{i=1}^{N_f} a_k \cdot \cos(\omega_k t + \phi_k) \quad (3)$$

$$\phi_k = \phi_0 + \sum_{i=1}^k \xi(\omega_i) \Delta\omega \quad (4)$$

1自由度系の応答は特解と一般解の和で表現されるので、式(1)で表現される地震波に対する SDOF の最終的な応答の期待値は式(5)となる。なお、速度波形、加速度波形も同様に定義が可能である。

$$E_\phi[y_k] = C_k \left\{ \cos\left(\omega_k t + \tilde{\phi}_k + \phi_0 + \sum_{l=1}^k \mu_l\right) \right\} \exp\left(-\sum_{l=1}^k \sum_{m=1}^k S_{lm}\right) \\ + \left\{ F_k(t) \cos\left(\tilde{\phi}_k + \phi_0 + \sum_{l=1}^k \mu_l\right) + D_k(t) \sin\left(\tilde{\phi}_k + \phi_0 + \sum_{l=1}^k \mu_l\right) \right\} \exp\left(-\sum_{l=1}^k \sum_{m=1}^k S_{lm}\right) \quad (5)$$

$$D_k(t) = e^{-h\omega_0 t} \frac{\omega_k}{\tilde{\omega}} \sin \tilde{\omega} t \quad F_k(t) = -e^{-h\omega_0 t} \left(\cos \tilde{\omega} t + \frac{h\omega_0}{\tilde{\omega}} \sin \tilde{\omega} t \right)$$

キーワード 位相スペクトル、ランダム振動

連絡先 〒185-8540 東京都国分寺市光町 2-8-38 (財)鉄道総合技術研究所 TEL042-573-7262

ここに、 h は構造物の減衰定数、 ω_0 は構造物の固有円振動数、 ϕ_0 は入力初期位相、 $\tilde{\phi}$ は入力に対する位相遅れである。同様に位相 ϕ に対する SDOF の応答の標準偏差も求めることが可能である。紙面の都合上、ここでは算定式を省略する。

4. モンテカルロシミュレーションとの比較

ここでは、上記の定式化とモンテカルロシミュレーションとの比較を行う。条件は、振幅 a_k は全て 1.0、群遅延時間 $\zeta(\omega_i)$ の平均値と標準偏差は、全振動数に対して $\mu_k = 5.0$ 、 $\sigma_k = 2.0$ である（振動数間の相関は無視）。構造物の条件は、減衰定数 $h=5\%$ 、周期 0.5 秒である。標準偏差波形 $Var_{\phi}[\dot{y}(t)]$ についてのみ示すが、標準偏差に対しては 1000 回程度の試行回数で厳密解に近い解に収束している。但し、平均値に対しては 10000 回以上の試行回数が必要であった。

5. 最大応答値の推定方法

応答波形 $y(t)$ は因果性を有する。 $y(t)$ のヒルベルト変換を $y_H(t)$ とし、次式で表現される関数 $y_c(t)$ を考える⁵⁾。

$$y_c(t) = y(t) + i \cdot y_H(t) = Y(t) \cdot \exp(i\phi(t)) \quad (6)$$

$Y(t)$ はコンプレックスエンベロープの振幅で、波形 $y(t)$ の包絡線を表す⁶⁾。そこで、二乗平均 $E[y(t)^2]$ の形状が包絡線に近いことを利用すると、 $Y(t) = \alpha \cdot E[y(t)^2]$ とおくことができる。このとき、包絡線 $Y(t)$ と波形 $y(t)$ の間には、パーセバルの定理を使うと、次式のような関係が成り立つので、

$$\int_{-\infty}^{\infty} Y^2(t) dt = 2 \times \int_{-\infty}^{\infty} y^2(t) dt \quad (7)$$

係数 α は式(8)を解くことにより得られる。

$$\int_{-\infty}^{\infty} Y^2(t) dt = \alpha^2 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} E[y^2(t)] dt = 2 \times \int_{-\infty}^{\infty} y^2(t) dt \quad (8)$$

となる。実際には、右辺はパーセバルの定理を利用して、入力のスペクトルと 1 自由度系の応答関数より算定する。試算した例を図 2 に示す。全振動数に対して、 α は 2 であることが分かる。また、ここで提案した速度応答スペクトルとモンテカルロシミュレーションによる応答スペクトルとは非常に良好に一致しており、今回の提案法で、位相のばらつきを考慮した応答スペクトルを予測できることが分かった。

6. おわりに

本論文では、位相特性を取入れた 1 自由度系のランダム振

動論について定式化した。また、Complex envelope の特性を利用して、最大応答値を推定するための手法を提案した。これにより、位相のばらつきを考慮した応答スペクトルを推定することが可能となった。現在、等価線形化法により、非線形応答スペクトルの予測まで手法を拡張している。別の機会に報告をしたい。

<参考文献> 1)佐藤・室野ら(1999): 震源・伝播・地点特性を考慮した地震動の位相スペクトルのモデル化, 土木学会論文集 No.6121-213, 2)佐藤, 室野ら(2000): 観測波に基づく地震動の位相スペクトルのモデル化, 土木学会論文集 No.640/I-50, 3)室野, 村上, 佐藤(2002): 断層近傍地震動の位相特性の経験的なモデル化, 第 11 回日本地震工学シンポジウム論文集, 4)佐藤, 室野(2004): 位相情報を利用した非定常地震動のシミュレーション法, 土木学会論文集, No.752/I-66, 5)和泉, 勝倉(1983): 地震動の位相情報に関する基礎的研究, 日本建築学会構造系論文集 第 327 号, 5)理論地震動研究会: 地震動その合成と波形処理, 鹿島出版会 pp.132-134

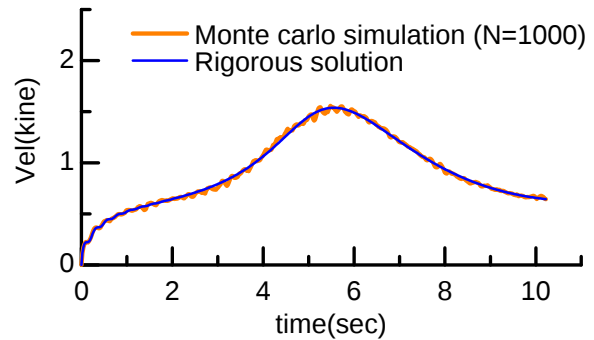


図1 モンテカルロシミュレーションとの比較
(標準偏差波形 $Var_{\phi}[\dot{y}(t)]$)

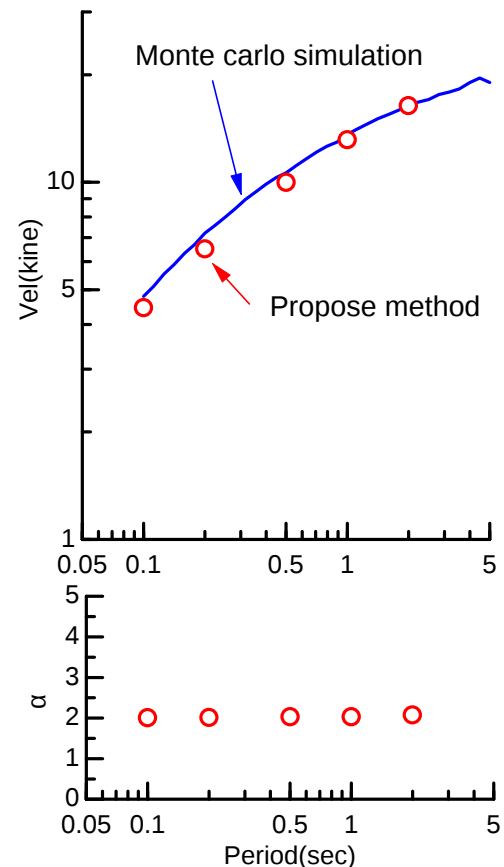


図2 応答スペクトルの予測結果