# RBF の利用による構造最適設計の数値計算的考察

北海学園大学　○正員　杉本博之，北海学園大学　学員　阿部淳一
香川大学　正員　荒川雅生，　山口大学　正員　古川浩平
山口大学　学員　能地宏幸，北武ｺﾝｻﾙﾀﾝﾄ(株)　正員　渡邊忠朋

**１．まえがき**　構造最適設計に関する近似の概念は，米国においては 1980 年前後，日本においては 1980 年代に活発に研究され，有限要素法の汎用プログラムにも組み込まれている．これらの近似は多項式を用いており，連続変数，連続関数を対象にする限り，局所的な精度は保証されるので，厳密な構造解析の回数の減少に大きな貢献があった[1)]．その後，離散的な要因に対する最適化のニーズが強くなり，特に耐震設計，耐震補強等において大規模解析を伴う最適化の必要性が増す中で，新たな近似の概念の導入が模索されて来た．その一つの方法として近年 RBF の応用に関する研究が発表されている[2) 3) 4)]．これらの研究においては，個々の工学的問題に対する RBF の有効性は議論されているが，構造最適設計に応用するときの数値計算上のパラメータに関しては十分検討がなされていないように思われる．

そこで，本研究では，構造最適設計の簡単な問題を例にとり，RBF に含まれるいくつかのパラメータについて考察を加える．以下，RBF の計算法の簡単な説明，対象とする設計問題，結果について順に説明する．

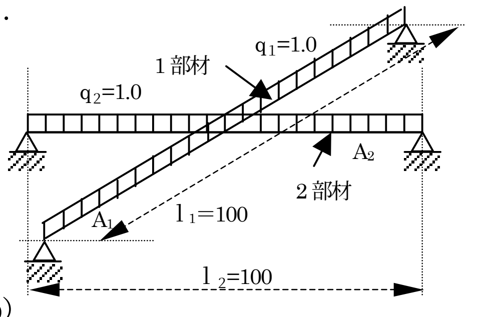
**２．RBF の概要**　RBF とは，釣鐘状の関数をいい，その代表的なものとして次式のガウス関数がある．

$$h(x)=\exp\left(-\|x-c\|^2/r^2\right) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

ここで，x は入力する変数，h(x)は x に対する基底関数の出力値，‖ ‖はノルムを示している．c は基底関数の中心位置，r は基底関数の半径である．r は，その関数の影響範囲を制御するパラメータであり，各変数に対して与えられる．2 変数の半径を $r_1$，$r_2$ とすると，基底関数の形状は，$r_1=r_2$ の場合は円，$r_1\neq r_2$ の場合は楕円となる．

RBF による応答曲面は，複数の基底関数を重ね合わせることにより形成される．つまり，式（1）に各基底関数の重みを乗じたものの総和であり，基底関数の数を m 個とすると，次式のように表現される．

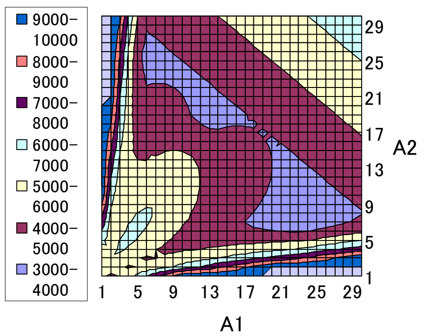
$$O(\mathbf{x})=\sum_{j=1}^{m} w_j h_j(\mathbf{x}) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$



図−1 構造モデル

ここで，O（x）は関数の出力値，$w_j$ は基底関数に対する重み係数である．この重みは，学習に用いたデータと学習に用いなかったデータに対する精度が，共に保たれるように適切に決定しなければならない．最適な重みを既知の情報から決定することは，関数による出力値と教師値の誤差が最小になるような重みを決定することに置き換えられる．そこで，p 個の学習用データ（$x_i$，$y_i$）(i=1，･･･，p）に対して，次式を最小にすることを考える．

$$E=\sum_{i=1}^{p}\left(y_i-O(x_i)\right)^2+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j w_j^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$



図−2 実曲面

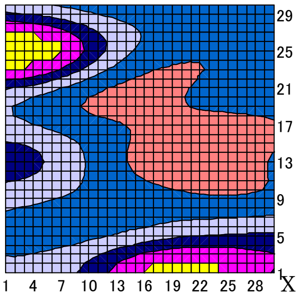
ここで，$y_i$ は教師値，$\lambda_j$ は $w_j$ の制御パラメータである．上式において，第１項は関数の出力値と教師値の２乗誤差であり，第２項は，特定の基底関数の過剰反応を抑え，後述の線形方程式の正則性を保つための重み抑制項である．最適な重みは，式（3）を $w_j$（j=1，･･･，m）に関して偏微分する事により得られる．結果のみを示すと以下のようになる．

$$\mathbf{W}=\left(\mathbf{H}^T\mathbf{H}+\mathbf{\Lambda}\right)^{-1}\mathbf{H}^T\mathbf{y} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

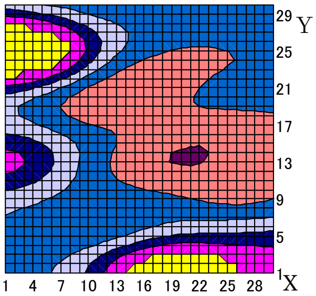
ここで，$\mathbf{y}=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{bmatrix}$，　$\mathbf{W}=\begin{bmatrix} w_1 & \cdots & w_m \end{bmatrix}^T$，　$\mathbf{\Lambda}=\begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_m \end{bmatrix}$，　$\mathbf{H}=\begin{bmatrix}\mathbf{h}_1 & \cdots & \mathbf{h}_m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} h_1(x_1) & \cdots & h_m(x_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_1(x_p) & \cdots & h_m(x_p) \end{bmatrix}$

である．

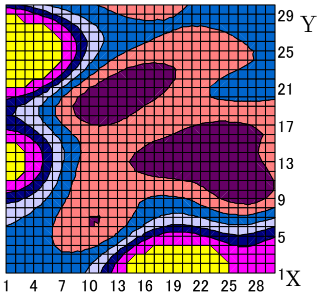
キーワード　RBF，構造最適設計，基底関数，罰金関数
連絡先　〒064−0926　札幌市中央区南 26 条西 11 丁目　TEL(011)841−1161　FAX(011)551−2951



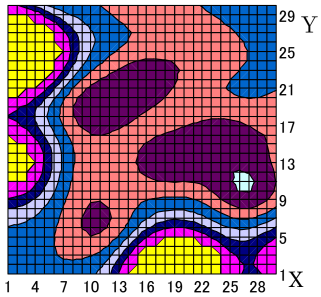
図−3 応答曲面(λ=2.0）



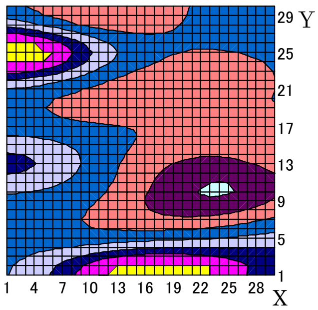
図−4 応答曲面(λ=1.0)



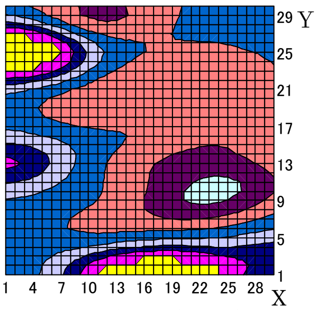
図−5 応答曲面(λ=0.1)



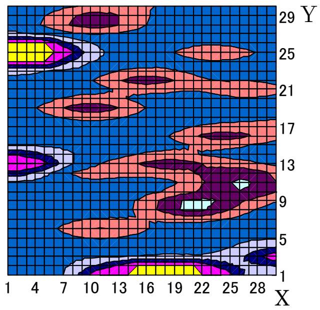
図−6 応答曲面(λ=0.01)



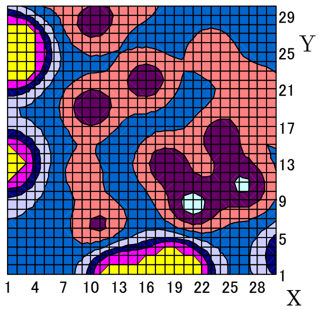
図−7 応答曲面(λ=2.0）



図−8 応答曲面(λ=1.0)



図−9 応答曲面(λ=0.1)



図−10 応答曲面(λ=0.01)

**３．検討の対象とする簡単な構造最適設計問題**[3]　対象とする構造を図−1 に示す．図中の Ai は i 部材の断面積，qi は i 部材の分布荷重，ｌi は i 部材のスパン長である．設計変数は $A_1$，$A_2$ の２変数である．詳細については参考文献に依りたい[5]．制約条件は，各部材の最大応力が許容応力以下とする．目的関数は制約条件問題を，罰金関数を用いて無制約問題とし，最小化する．以下に，目的関数，制約条件，罰金関数を示す．

$$F=\sum_{i=1}^{2}A_i l_i \qquad g_i=|\sigma_i|-20\le 0 \qquad O=F(1+\gamma\sum_{i=1}^{2}\sqrt{g_i}) \quad \rightarrow \quad \min$$

ここで，F は目的関数，$g_i$ は i 部材の制約条件，$\sigma_i$ は i 部材の応力，O は罰金関数である．γはペナルティー係数で，本研究では 1.0 を用いた．応答曲面は罰金関数を対象として与える．

**４．λの検討**　λは式(3)の第１項と第２項のどちらの項を支配的に最小化するかを決める値である．本項では，λの効果を視覚的に確認することを目的とする．λの値は 2.0，1.0，0.1，0.01 の４種類を設定し解析を行った．また半径 r は最急降下法により最適化を行っている．図−2 は罰金関数の実曲面，図−3〜6 は教師データ 20 個で作成した，λ=2.0〜0.01 に対応する曲面を示す.さらに図−7〜10 は教師データ 30 個で作成した，λ=2.0〜0.01 に対応する曲面を示す.図は罰金関数を高さとして等高線を用いて表記し，X 軸に A1，Y 軸に A2 とする．データ数 20 個の曲面を比較すると，λの値が大きいほど曲面は平坦なものとなり，教師データの効果が小さいと考えられる．一方，λの値が小さいと，実曲面により近い曲面が作成され，局所解も確認できる．半径を比較すると，λ=2.0 では，X 方向の半径は 9.5，Y 方向は 3.4 となった．λ＝0.01 における半径はそれぞれ，4.9，4.3 となった．次にデータ数 30 で作成された曲面を比較する．データ数 30 個では，λが大きいほどより実曲面に近い曲面が作成されている．半径を比較すると，λ=2.0 における半径は 9.1，2.6 となり，データ数 20 個の曲面と大きな違いはないが，λ=0.01 における半径はそれぞれ，3.0，3.0 となり，半径は小さくなっている．λの値が大きい場合，半径が大きく，基底関数が重なりあうことによって，曲面全体の汎化能力を保つ傾向にある．一方，λが小さい場合，教師データの精度を保とうとするため，データ数が増えるほど近接するデータと重なりあわないように，半径が小さくなる傾向にある．

**まとめ**　簡単な構造最適設計問題を例にとり，RBF のパラメータについて検討した．λの特性は，その値が高いほど，曲面全体の汎化能力を保つが，教師データの効果は低い．一方，λの値が小さいと，教師データの精度を保つため半径は小さくなり，曲面全体の汎化能力が低くなることによって，最適化の際，局所解に陥りやすいと考えられる．大域的な最適解を探索するには，このようなλの特性を考慮し，各データに最適なλを指定することが必要だと考えられる．

参考文献　1）柏村孝義：統計的設計支援システムの開発とその応用，横浜国立大学博士学位論文，1997.　2）倉本・鉄賀・東・荒川・中山・古川：RBF ネットワークを用いた非線形がけ崩れ発生限界雨量線の設定に関する研究，土木学会論文集 No. 672／VI−50,2001.　3）荒川雅生・中山弘隆・石川浩：ラディアルベーシス関数ネットワークと領域適応型遺伝的アルゴリズムを用いた最適設計，機械学会論文集 67−655C,2002.　4）井上・中山・吉森:RBF ネットワークによる関数近似を用いた既設構造物の最適耐震要素決定法に関する研究，土木学会論文集 No. 752／I−66,2004.　5）山田・大久保監訳：最適構造設計−概念・方法・応用−，1981