

Subset Markov Chain Monte Carlo Simulation による信頼性解析法の開発

岐阜大学 工学部 学生員 ○大西教文

岐阜大学 工学部 正員 本城勇介

岐阜大学 工学部 学生員 Amaty Shailendra

岐阜大学 工学部 学生 三輪宏和

1. 背景と目的

限界状態設計法の導入により、正確で効率的な信頼性解析法が求められている。そこで、本研究では従来の Ordinary Monte Carlo Simulation や Importance Sampling 等の問題点を解決する方法の一つとして subset を用いた Markov chain Monte Carlo Simulation を用いて、その有用性の検討を目的とする。

2. Subset-MCMC 法

2.1 subset 法

損傷領域を F とし、損傷確率を $P(F)$ と表す。ここで、全体集合を F_0 、その部分集合を F_i と表し、 $F_0=F$ とするとそれぞれの部分集合 (Subset) は以下のように示すことができる。

$$F_0 \supset F_1 \supset F_2 \supset \dots \supset F_m = F \quad (2.1)$$

このとき、損傷確率はこれらの部分集合を用いることにより次式で算定できる。

$$P(F) = P(F_m) = P\left(\frac{F_m}{F_{m-1}}\right) P\left(\frac{F_{m-1}}{F_{m-2}}\right) \dots P\left(\frac{F_1}{F_0}\right) \quad (2.2)$$

2.2 subset-MCMC 法による破壊確率の算定手順

- (1) 確率分布に従うサンプルを、 N_t 個生成させる。
- (2) 生成されたサンプルの内、限界状態面に近いサンプルから N_s ($< N_t$) 個選び、次式を用いて部分空間 F_{k+1} を定義する。

$$F_{k+1} = \left\{ x \mid z(x) \leq \frac{z_{n_i} + z_{n_{i+1}}}{2} \right\} \quad (2.3)$$

このとき部分空間 F_k 内において F_{k+1} に属するサンプルが生成される確率は $P(F_{k+1} \mid F_k) = N_s/N_t$ となる。

- (3) MCMC により部分空間 F_{k+1} 内に N_t 個のサンプルを生成させる。MCMC によるサンプルの生成方法を以下に示す。
 - (i) 任意の分布関数 $q(x \mid x')$ を定め、(2)で採択された値を x' として用い、新たにサンプルを生成させる。本研究では $q(x \mid x')$ としてもっとも扱いやすい一様確率密度関数を用いる。
 - (ii) 採択率 $\alpha(x', x_i)$ を算定し、確率 α で $x_{i+1} = x'$ 、確率 $1 - \alpha$ で $x_{i+1} = x_i$ とする。採択率 α は以下の式で定義される。

$$\alpha = \min \left\{ 1.0, \frac{\pi(x') \cdot I_D(x')}{\pi(x_i)} \right\} \quad (2.4)$$

ただし、 $I_D(x') = \{1: x' \in F_k \quad 0: otherwise\}$

ここで、 $i=1, 2, \dots, N_t$ まで繰り返す。

(4) 損傷が生じる、すなわち $z < 0$ となるサンプル個数 N_f が十分な場合には終了する。そうでない場合には (2)に戻る。損傷確率は次式で計算する。

$$P(z < 0) = \left\{ \frac{N_s}{N_t} \right\}^m \frac{N_f}{N_t} \quad (2.5)$$

N_s は空間を区切る大きさを示す。つまり部分空間の大きさを決めるパラメーターとなる。

3 Subset-MCMC を用いた解析

3.1 解析概要

使用する乱数ジェネレーターは Mersenne Twister²⁾ (以下 MT), Urand1³⁾ (以下 U1) を用いる。次に、乱数の生成手段としてランダムに生成する場合と、初期サンプルを方格状に配置し、それぞれのサンプルについて N_s 個ずつ生成していく場合を考える。

初期サンプルにおいて方格状のサンプルを発生するのは、第1回のサンプルが特に重要であり、以後に偏りを生じさせたいためである。ここで設定した6ケースを表1に示す。

表1：設定ケース

ケース	乱数発生	初期サンプル	サンプル数 N_t 値 (それぞれの N_s 値)
①	MT	ランダム	100(5, 10, 20, 50), 1000(10, 20, 50, 100, 200, 500), 2000(10, 20, 40, 80, 100, 200)
②	U1	ランダム	
③	MT	3×3方格状	81(9, 27), 972(243, 486), 2187(243, 729)
④	U1	3×3方格状	
⑤	MT	5×5方格状	100(5, 10, 20, 50), 1000(50, 100, 200), 2000(100, 200, 400)
⑥	U1	5×5方格状	

3.2 解析1、線形限界状態関数

限界状態関数が線形で、その基本変数の不確実性が正規分布に従う場合を考える。基本変数の不確実性は以下のように設定した。

性能関数 $Z = R - S$ ($Z \leq 0$ のとき破壊とする)

抵抗(R): (7.0, 1.0) 荷重(S): (3.0, 1.0)

この場合の破壊確率 P_F の理論値は $P_F = 0.002339$ となり、この値を対数表示で示すと $\log(P_F) = -2.61$ となる。

3.3 解析2, 限界状態関数が非線形の場合

限界状態関数が非線形の場合を考える。基本変数の不確か率は以下のように設定した。（吉田他 2003）

性能関数 $Z=S-(R-6)^2-7$ ($Z \leq 0$ のとき破壊)

抵抗(R): (5.0, 0.7071) 荷重(S): (9.0, 0.7071)

破壊確率 P_F を数値積分により求めると, $P_F = 7.33 \times 10^{-5}$ が求まる。また, 対数で表すと $\log(P_F) = -4.13$ である。

3.4 解析結果および考察

表1, 表2にそれぞれ, 解析1および2の $N_t=100$ の場合の解析結果を示し, それぞれのケースで, 100回の推定を行い P_F の平均, 標準偏差, 変動係数 C.O.V をすべて $\log P_F$ により整理した。さらに $\log P_F$ の推定値の平均と真値との比も示した。

表2: 解析1の結果

乱数	初期 サンプル	N_t	N_s	N_{ss}	平均	s.d	C.O.V	平均 真値
MT	ランダム	100	5	20	-3.06	0.74	-0.24	0.853
			10	10	-3.49	1.00	-0.29	0.748
			20	5	-4.48	1.26	-0.28	0.583
			50	2	-7.02	2.06	-0.29	0.372
U1	ランダム	100	5	20	-3	0.69	-0.23	0.870
			10	10	-3.55	0.84	-0.24	0.735
			20	5	-4.52	1.17	-0.26	0.577
			50	2	-7.13	1.99	-0.28	0.366
MT	3×3 方格状	81	9	9	-3.18	0.69	-0.22	0.821
			27	3	-5.29	1.44	-0.27	0.493
U1	3×3 方格状	81	9	9	-3.13	0.67	-0.21	0.834
			27	3	-4.96	1.36	-0.27	0.526
MT	5×5 方格状	100	5	20	-2.63	0.37	-0.14	0.992
			10	10	-2.99	0.54	-0.18	0.873
			20	5	-4.03	0.93	-0.23	0.648
			50	2	-4.19	1.16	-0.28	0.623
U1	5×5 方格状	100	5	20	-2.64	0.40	-0.15	0.989
			10	10	-3.04	0.62	-0.20	0.859
			20	5	-4.04	1.00	-0.25	0.646
			50	2	-14.72	4.14	-0.28	0.177

表3: 解析2の結果

乱数	初期 サンプル	N_t	N_s	N_{ss}	平均	s.d	C.O.V	平均 真値
MT	ランダム	100	5	20	-3.87	0.84	-0.22	1.067
			10	10	-4.52	1.15	-0.26	0.914
			20	5	-5.75	1.40	-0.24	0.718
			50	2	-8.82	2.75	-0.31	0.468
U1	ランダム	100	5	20	-4.02	0.76	-0.19	1.027
			10	10	-4.65	1.08	-0.23	0.888
			20	5	-6.02	1.38	-0.23	0.686
			50	2	-8.95	2.26	-0.25	0.461
MT	3×3 方格状	81	9	9	-3.93	0.85	-0.22	1.051
			27	3	-6.5	1.77	-0.27	0.635
U1	3×3 方格状	81	9	9	-4.25	0.81	-0.19	0.972
			27	3	-7.03	1.64	-0.23	0.587
MT	5×5 方格状	100	5	20	-3.4	0.45	-0.13	1.215
			10	10	-3.98	0.69	-0.17	1.038
			20	5	-5.16	1.34	-0.26	0.800
			50	2	-8.26	2.22	-0.27	0.500
U1	5×5 方格状	100	5	20	-3.38	0.49	-0.14	1.222
			10	10	-4.07	0.64	-0.16	1.015
			20	5	-5.43	1.22	-0.22	0.761
			50	2	-8.39	2.24	-0.27	0.492

解析1の場合について見ると, 次のことが言えた。

- (1) 全サンプル数 N_t に対するサブセット数 N_{ss} が, N_{ss}/N_t が 0.2~0.1 程度のとき推定値 P_F は真値に近かった。
- (2) 初期サンプルの発生方法が 5×5 方格状のとき, 良い値を示した。
- (3) C.O.V は, 一般に 20%前後の値を示した。また推定値 P_F が真値に近いほど C.O.V は小さくなる傾向が見られる。

解析2の場合については, 次のことが言える。

- (1) N_{ss}/N_t が, 0.2~0.1 程度のとき, 推定値 P_F は真値に近かった。
- (2) 初期サンプルの発生について, それぞれの最良のケースでは, 発生後に依存しないように思われる。
- (3) C.O.V は一般に 20%前後を示した。また P_F の推定値が真値に近いとき, 若干 C.O.V が小さくなると思われる。

ここには示していないが, $N_t=1000$, $N_t=2000$ に増やしても上記の傾向はだいたい等しく, 結果に著しい変化は見られなかった。

4 結論

- (1) Subset MCMC 法の推定結果が良好であるのは, Subset 数を全サンプル数の 10~20%程度としたときであった。
- (2) (1)の結果は, 今回の計算の打ち切り基準が $N_f \geq N_s$ であるため, Subset 数の取り方の結果であるか, 打ち切り基準を $N_f \geq N_s$ としたためであるか明確でない面があり, 今後の検討を必要とする。
- (3) Subset MCMC ではステップごとのサンプル数 N_t を増やしても, P_F の推定精度の向上は計れなかった。
- (4) 解析1と2を比べると, 推定精度に大きな差はなく, 設定した範囲における程度の性能関数の非線形性は, Subset MCMC による P_F の推定精度にあまり大きな差は与えなかった。
- (5) 乱数ジェネレーターの影響は, 今回の解析では見られず, 今後 Subset 数の設定と打ち切り基準を切り離した評価, P_F のオーダーを変化させた検討等を行っていく必要があると思われる。

【参考文献】

- (1) 吉田郁政, 鈴木修一: MCMC を用いた低損傷確率の算定法
- (2) Mersenne Twister Home Page :
<http://www.math.keio.ac.jp/matsumoto/mt.html>
- (3) 渡部力, 名取亮, 小国力: FORTRAN77 による数値計算ソフトウェア, 丸善株式会社