

重要サンプリング関数による動的非線形系の初通過確率算定の効率化

武蔵工業大学 正会員 ○丸山 収
武蔵工業大学 正会員 星谷 勝

1. はじめに

本研究はモンテカルロシミュレーションに分散低減法を併用して、動的非線形構造系の初通過確率を算定することを目的としている。ここでは限界状態をもとに設定された閾値の初通過問題を評価する際に、構造系の確率過程入力項に、重要サンプリング関数項を加法的に付加することで破壊領域に達するサンプル実現過程を高頻度に得る手法を示している。重要サンプリング関数を付加することで確率測度が変化する影響は、ギルサノフの定理により評価され、解析対象構造系の初通過確率が求められる。また、重要サンプリング関数を与えるために動的非線形構造系の終端状態制御問題をオンラインで解くことを提案している。

2. 問題の設定

構造物の振動方程式は、一般に2階微分方程式で与えられる。このモデルの状態量を状態空間表示することにより、入力 $w(t)$ をホワイトノイズとする1階のベクトル微分方程式に帰着させることができる。

$$\frac{dz(t)}{dt} = f[t, z(t)] + G(t)w(t) \quad (1)$$

ここで、 $z(t)$ はシステムの応答を要素とする状態ベクトル、 $f[t, z(t)]$ は非線形関数、 $G(t)$ は入力関係を規定する係数ベクトル、さらにホワイトノイズ $w(t)$ は平均値0、 $E[w(t)w(\tau)^T] = Q(t)\delta(t-\tau)$ である。

ホワイトノイズ $w(t)$ を非線形システムへの入力とし、非線形システムの出力 $z(t)$ の関数として設定される性能関数 $g(z(t))$ が $0 \leq t \leq T$ において負となる確率を用いて初通過確率 $P_f^{0,T}$ が算出される。

$$P_f^{0,T} = P(g(z(t)) \leq 0, 0 \leq t \leq T) \quad (2)$$

一般に性能関数 $g(z(t))$ は限界状態をもとに応答ベクトル $z(t)$ の関数として与えられるものであるが、本研究では、式(3)に示すように、 $0 \leq t \leq T$ において $z(t)$ が閾値 x_d を超過する場合を構造系の破壊と見なすこととする。

$$g(z(t)) = x_d - |z(t)| \quad (3)$$

ここで、 x_d = 正定値ベクトルである。

また、定義関数 $I[\cdot]$ を式(4)とすると、初通過確率 $P_f^{0,T}$ は、式(5)で与えられる。

$$I[g(z(t)), 0 \leq t \leq T] = 1 \quad g(z(t)) \leq 0 \\ = 0 \quad g(z(t)) > 0 \quad (4)$$

$$P_f^{0,T} = E[I[g(z(t)), 0 \leq t \leq T]] \quad (5)$$

通常のモンテカルロ法は、式(1)からサンプル実現過程 $z(t)^{(i)}$, $i = 1, 2, \dots, N$ を算出し、継続時間 $0 \leq t \leq T$ において、式(5)を近似的に評価するものである。

$$\hat{P}_f^{0,T} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I[g(z(t)^{(i)}), 0 \leq t \leq T] \quad (6)$$

式(6)を効率よく評価するために、各種の分散低減法に関する研究が行われている。本研究では、以下に示すように式(1)における入力 $w(t)$ に重要サンプリング関数項を付加して、高頻度に破壊領域に達するように応答のサンプル過程をオンライン制御するものである。

3. 確率測度変換

式(1)の $w(t)$ に式(7)に示すように応答を制御するための重要サンプリング関数を付加して入力とする。したがって、式(1)に対応する式(8)の応答を $\tilde{z}(t)$ とする。

$$\tilde{w}(t) = \theta(t) + w(t) \quad (7)$$

$$\frac{d\tilde{z}(t)}{dt} = f[t, \tilde{z}(t)] + G\tilde{w}(t) \quad (8)$$

式(7)によると入力の確率測度が変換される。この影響は、尤度比プロセスにより評価される。ギルサノフの定理から尤度比プロセス $L(t)$ は、次式で与えられる。

$$L(t) = \exp\left[\int_0^t \theta(s) d\tilde{w}(s) - \frac{1}{2} \int_0^t \theta(s)^2 ds\right] \quad (9)$$

また、式(9)の $L(t)$ は初期条件 $L(0) = 1$ であり、次式を満たすマーチンゲールである。

$$\frac{dL(t)}{dt} = -\theta(t)L(t)w(t) \quad (10)$$

上記の関係を用いれば、式(5)に示した継続時間 $0 \leq t \leq T$ における初通過確率 $P_f^{0,T}$ は、尤度比プロセスを用いて次式で与えられる。

キーワード 初通過確率 動的信頼性 重要サンプリング 確率測度変換

連絡先 〒158-8557 東京都世田谷区玉堤 1 - 2 8 - 1 武蔵工業大学都市基盤工学科 TEL 03-3703-3111

$$P_f^{0,T} = E[I[g(\tilde{z}(t)), 0 \leq t \leq T]] \quad (11)$$

$$= E[I[g(\tilde{z}(t)), 0 \leq t \leq T]L(T)]$$

適切な重要サンプリング関数が求められ，式(8)にもとづいてサンプル実現過程をシミュレートし，式(6)よりも式(13)により得られる $\hat{P}_f^{0,T}$ の分散が小さければ，効率的な分散低減法となる．

$$\hat{P}_f^{0,T} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I[g(\tilde{z}(t)^{(i)}, 0 \leq t \leq T)]L(T)^{(i)} \quad (12)$$

ここで， $L(T)^{(i)}$ は終端時刻における尤度比プロセスの値である．

仮に $I[g(\tilde{z}(t)^{(i)})]L(T)^{(i)}$ が非確率的になるような $\theta(t)$ を求めることが可能ならば，理想的な分散低減法となる．このような $\theta(t)$ は，理論的に次式で与えられる．

$$\theta(t) = -\frac{1}{P_f^{t,T}} \cdot \frac{\partial P_f^{t,T}}{\partial \tilde{z}(t)} \cdot G(t) \quad (13)$$

ここで， $P_f^{t,T}$ は時刻 t から T における初通過確率の理論解である．

式(13)から $\theta(t)$ を求めるためには，時刻 t から T における理論解 $P_f^{t,T}$ が予め既知であることが必要となり，実際に式(13)を計算することは困難である．したがって式(12)を効率よく評価するためには $\theta(t)$ の与え方が重要である．

本研究では，継続時間 $0 \leq t \leq T$ の範囲内で応答 $\tilde{z}(t)$ に関して，終端時刻における性能関数の期待値が次式で与えられる終端状態制御問題を考える．

$$\min E\left[\int_0^T \theta(t)^T N \theta(t) dt\right] \text{ subject to } E[g(\tilde{z}(T))] = 0 \quad (14)$$

ここで， N は，重み係数である．

式(14)は，継続時間において $\theta(t)^T N \theta(t)$ の積分値の期待値が最小となり，終端時刻において応答が限界状態に達するような制御入力を，重要サンプリング関数とする．

4．数値計算例

本研究では，以下に示す非線形 1 自由度系を対象として解析例を示す．

$$\ddot{x}(t) + 2h\omega_0 \dot{x}(t) + \omega_0^2 \phi(\dot{x}(t), x(t)) = -w(t) \quad (15)$$

ここで， $w(t)$ はガウス性ホワイトノイズである．

非線形復元力特性として式(16)に示す Bouc and Wen モデルを採用した．

$$\dot{\phi}(\dot{x}(t), x(t)) = A\dot{x} - \beta|\dot{x}||\phi(\dot{x}, x)|^{n-1}\phi(\dot{x}, x) - \gamma\dot{x}|\phi(\dot{x}, x)|^n \quad (16)$$

ここで， A ， β および γ は履歴特性をコントロールするパラメータである．また，式(16)において $n=1$ として定式化する．式(15)および式(16)に対して， $z(t) = [x(t) \ \dot{x}(t) \ \phi(\dot{x}(t), x(t))]^T = [\tilde{z}_1(t) \ \tilde{z}_2(t) \ \tilde{z}_3(t)]^T$ と状態

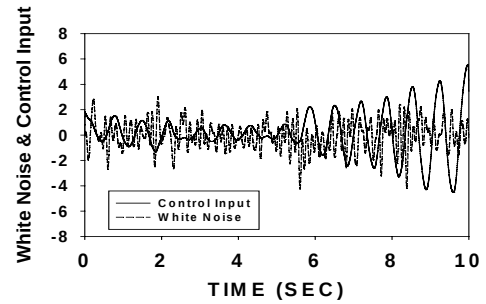


Fig. 1 White Noise and Control Inputs

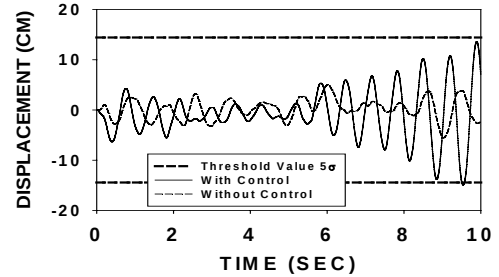


Fig.2 Displacement Responses

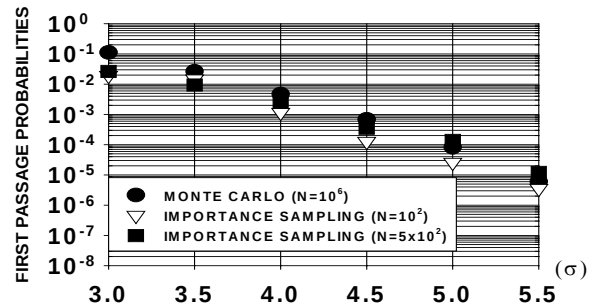


Fig.3 First Passage Probabilities

空間表示を行い，式(1)を得た．

構造系の動特性は $h=0.05$ ， $\omega_0=7.07(\text{rad/sec})$ ， $A=1.0$ ， $\beta=0.01$ および $\gamma=0.01$ の系の解析を行った．また，入力波形は周波数帯域が 0.0 Hz から 10.0 Hz であり，式(1)において $G=[0, -122.5, 0]^T$ として， $w(t)$ は平均値 0，標準偏差 1 (gal) のガウス性ホワイトノイズとした．時刻間 $\Delta t=0.01(\text{sec})$ ，継続時間 $T=10.0(\text{sec})$ の初通過確率を評価することとした．

Fig. 1 は， $\beta=0.01$ および $\gamma=0.01$ として与えた場合に，式(1)の変位応答波形の標準偏差 σ の 5σ を閾値と設定した場合の制御入力の 1 サンプル実現過程，すなわち重要サンプル関数とオリジナルシステムへの確率過程入力を示している．Fig. 2 には，Fig. 1 に示した制御入力の有無による変位応答波形を示している．Fig. 3 には，初通過確率の評価結果を示している．ここでは，提案手法に関して 100 回および 500 回の計算結果とモンテカルロシミュレーション 10^6 回で得られた基準値と比較しているが，提案手法は基準値と良好な対応を示していることがわかる．