

MCMC を用いた低損傷確率の算定法に関する基礎研究

東電設計（株） 正会員 吉田 郁政
 京都大学防災研究所 正会員 佐藤 忠信

1. はじめに

低損傷確率の効率的算定法への必要性は、リスク評価、ライフサイクルコスト（LCC）、確率的安全性評価（PSA）などの重要性の認識によって高まりつつある。計算機能力の飛躍的向上からモンテカルロシミュレーション（以下、MCS と記す）が現実的な方法となり様々場面で使われるようになってきており、効率化への工夫¹⁾は重要なテーマの一つである。こうした背景のもと本研究では損傷に対して影響の大きい部分空間を適応的に絞り込み（subset 法²⁾）、その部分空間内にマルコフチェーンモンテカルロ法³⁾（以下、MCMC と記す）を用いてサンプルを発生させて効率的に損傷確率を算定する方法について紹介し、複数の設計点を有する問題に対しても有効に機能することを示す。

2. Subset 法と MCMC を用いた低損傷確率算定法

図-1にsubset法²⁾を用いた損傷確率算定概念を示す。まず、1回目は通常MCSと同様にサンプルを発生させ、その限界状態関数の値を算定する。限界状態を損なうサンプルが発生している場合にはその比率が損傷確率となるが、低損傷確率の問題ではサンプル数が十分に大きくないと損傷にいたるサンプルが発生しない。そこで、subset法では1回目のMCS結果に基づき $Z < C_1$ となる部分空間（損傷空間よりも広い部分空間、 $C_1 > 0$ ）を定め、MCMC³⁾を用いてその部分空間内にサンプルを発生させる。これを繰り返し部分空間を徐々に小さくすることで損傷確率を算定する。 k 番目の部分集合内に損傷にいたる n_f 個のサンプルが得られた場合には次式によって損傷確率を算定することができる。また、部分空間 F_i における条件付確率密度関数 $pdf(x/F_i)$ は以下の式で表わすことができる。

$$P(z < 0) = \left(\frac{n_s}{n_t} \right)^k \frac{n_f}{n_t} \quad (1) \quad pdf(x/F_i) = \frac{pdf(x)I_{F_i}(x)}{P(F_i)} \quad (2)$$

n_s は部分空間の大きさを決めるパラメタであり、後述の例題では n_t を100、 n_s は10とした。この場合、 $P(F_i/F_{i-1})=0.1$ となるように部分空間を絞り込んでいることになる。 $I_{F_i}(x)$ は x が部分空間 F_i の内にある場合($z < C_i$)には1、外にある場合($z \geq C_i$)には0となる関数である。

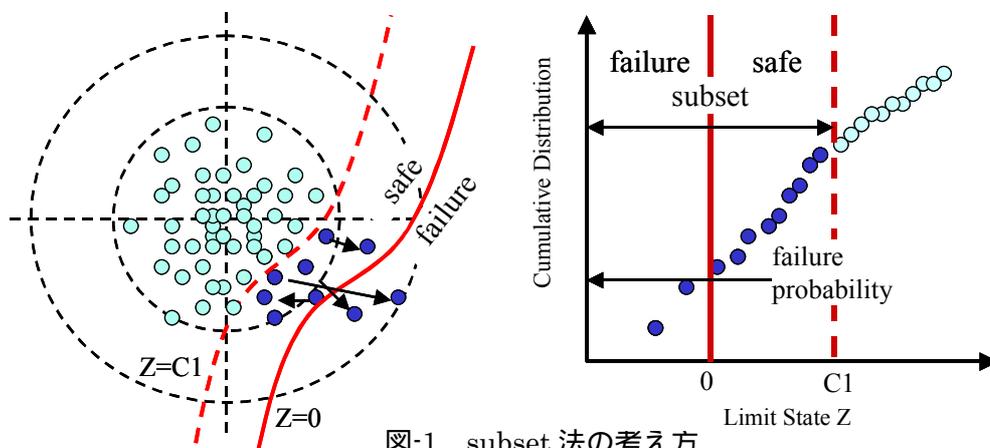


図-1 subset 法の考え方

$Z < C_1$ となる部分空間(subset)を定め、MCMC を用いてサンプルを発生させる

キーワード 損傷確率，モンテカルロシミュレーション，マルコフ過程，部分空間

連絡先 〒110-0015 東京都台東区東上野 3-3-3 東電設計（株）地盤・構造部 TEL 03-4464-5525

3. 数値計算例

式(3)に示す簡単な2変数の非線形限界状態関数を考えて数値シミュレーションを行った。

$$Z = X_2 - \sin(c_1 \cdot X_1) + c_2,$$

$$Z < 0; \text{failure},$$

$$X_2 \sim N(9, 0.7071)$$

$$X_1 \sim N(5, 0.7071) \quad (3)$$

X_1, X_2 はそれぞれ正規分布に従うと仮定した。限界状態関数と確率密度分布を図-2に示す。図中実線が限界状態関数であり、波線が2変数の確率密度分布の等高線を表している。図中 subset 0 から

5まで示してあり、サンプルサイズはそれぞれ100とした subset 0は通常のMCSと同じである。平均値周りにサンプルが分布しており破壊に至るサンプルは一つもない。破壊に近いサンプルを10個選び部分空間を規定してMCMCによりサンプルを発生させる。その結果を subset 1 に示した。多少限界状態線（破壊）に近づいていることがわかる。これを繰り返すことにより subset 4 から限界状態を超えるサンプルが現れた。この例題は平均値からの距離が等しい点が2つある問題であるが、それぞれに分散しながら2つの破壊点に近づいている様子わかる。

この結果をもとに Z に関する累積分布関数と確率密度分布を求め¹⁾ 図-3に示す。数値積分から求めた累積分布関数を実践で示した。これを真の分布と考えると多少のばらつきはあるもののわずか600回のシミュレーションで小さな確率まで求められていることがわかる。より高い精度が必要な場合には各部分空間で発生させるサンプルサイズを大きくすればよい。これについては別途、例を報告する。

4. まとめ

損傷に対して危険な部分空間を自動的に絞り込み、その空間内へMCMC (Markov chain Monte Carlo) を用いてサンプルを発生させ、効率的に損傷確率を算定する方法の紹介を行い、複数の設計点がある問題に対して数値シミュレーションを行った。本方法では自動的に各変数への感度解析も行われ多くの問題に対して有効な方法と考えられる。

参考文献

1) 吉田郁政、鈴木修一：限界地震動指標を用いた損傷確率の効率的な算定方法、構造工学論文集、pp.201-206、2003、2) Au, S-K and Beck, J. L., Application of Subset Simulation to Seismic Risk Analysis, 15th ASCE Engineering Mechanics, 2002、3) Gilks, W.R., Richardson, S., Spiegelhalter, D.J., Markov chain Monte Carlo in practice, Chapman & Hall, 1996

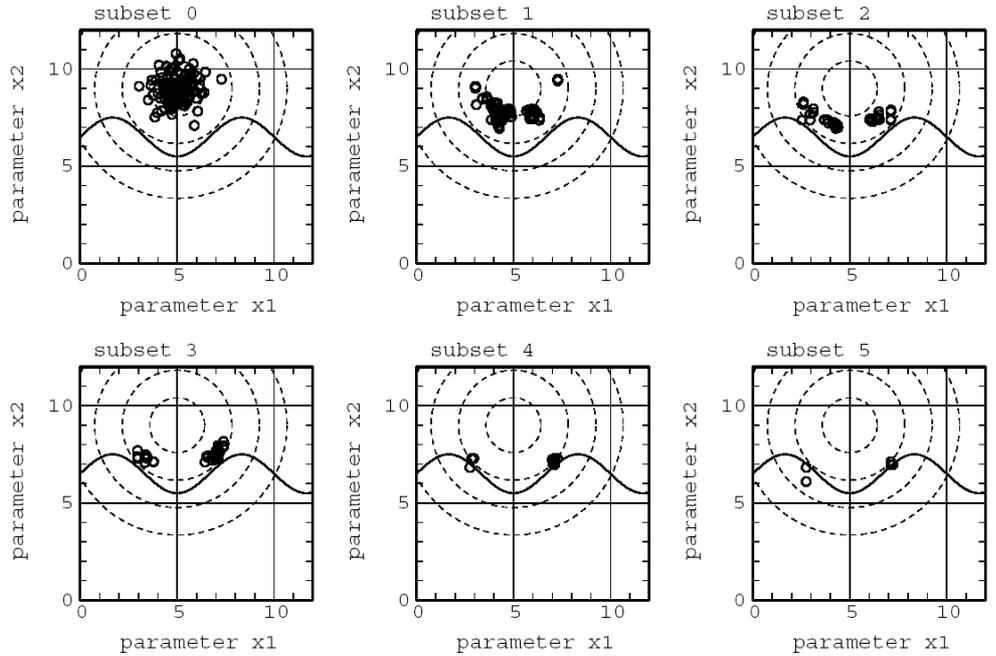
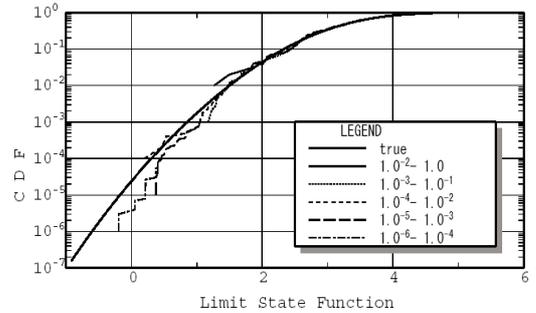


図-2 部分空間の絞り込み 実線：限界状態関数、波線：確率密度の等高線



実線は数値積分で算定された分布

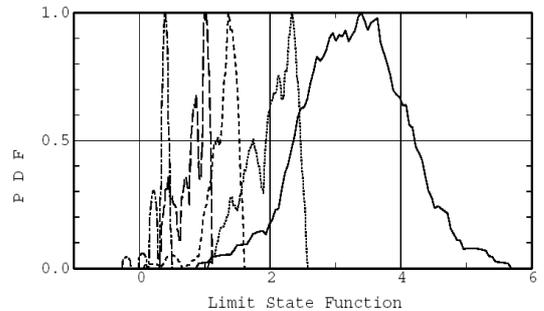


図-3 算定された累積分布関数と密度関数