

群遅延時間と瞬間周波数の解析的表現法

京都大学防災研究所 佐藤 忠信

1. まえがき

地震波などのデジタル信号が与えられたときに、離散化フーリエ変換とヒルバート変換を用いることにより、信号の群遅延時間や瞬間周波数を数値的に求めることは、そんなに難しいことではない。しかし、数値的なデータからそれらの一般的な特性を把握することはあまり簡単なことではない。そこで、群遅延時間と瞬間周波数を離散化された信号値の関数として解析的に表現した上で、それから導かれるいくつかの特性を明らかにする。

2. 実時間信号の複素時間信号への変換と瞬間周波数の表現

実時間信号 $x(t)$ を余弦関数の重ね合わせで次式のように表現できるものとする

$$x(t) = \sum_{l=-N/2+1}^{N/2} x_l = \sum_{l=-N/2+1}^{N/2} A_l \cos(\omega_l t + \phi_l) \Delta f, \quad x_l(t) = A_l \cos(\omega_l t + \phi_l) \Delta f \quad (1)$$

ここに、 N は振動数領域の離散点の数で2の累乗で表現される。 A_l と ϕ_l は周波数 ω_l での振幅と位相、 Δf は振動数の増分である。 $x_l(t)$ のフーリエ変換を $\tilde{x}_l(\omega)$ とすれば、

$$\tilde{x}_l(\omega) = \frac{A_l \Delta f}{2} \{ \delta(\omega - \omega_l) + \delta(\omega + \omega_l) \} \cos \phi_l - \frac{A_l \Delta f}{2i} \{ \delta(\omega - \omega_l) - \delta(\omega + \omega_l) \} \sin \phi_l \quad (2)$$

ここに、 δ はデルタ関数、 $i = \sqrt{-1}$ である。 $x_l(t)$ の時間領域におけるヒルバート変換を $\hat{x}_l(t)$ とすればそのフーリエ変換 $\tilde{\hat{x}}_l(\omega)$ は

$$\tilde{\hat{x}}_l(\omega) = \text{sgn}(\omega) \tilde{x}_l(\omega) = \frac{A_l \Delta f}{2} \{ \delta(\omega - \omega_l) - \delta(\omega + \omega_l) \} \cos \phi_l - \frac{A_l \Delta f}{2i} \{ \delta(\omega - \omega_l) + \delta(\omega + \omega_l) \} \sin \phi_l \quad (3)$$

となるので、フーリエ逆変換を計算することにより、 $\hat{x}_l(t)$ は次式のように与えられる。

$$\hat{x}_l(t) = i A_l \sin(\omega_l t + \phi_l) \Delta f, \quad \hat{x}(t) = i \sum_{l=-N/2+1}^{N/2} A_l \sin(\omega_l t + \phi_l) \Delta f \quad (4)$$

したがって、時間領域における複素包絡線関数 $x_c(t)$ は次式で与えられる。

$$x_c(t) = x(t) + \hat{x}(t) = \sum_{l=-N/2+1}^{N/2} A_l \cos(\omega_l t + \phi_l) \Delta f + i \sum_{l=-N/2+1}^{N/2} A_l \sin(\omega_l t + \phi_l) \Delta f = \sum_{l=-N/2+1}^{N/2} Y_l = E(t) \exp\{i\varphi(t)\} \quad (5)$$

$$Y_l(t) = x_l(t) + \hat{x}_l(t) = A_l \{ \cos(\omega_l t + \phi_l) + i \sin(\omega_l t + \phi_l) \} \Delta f, \quad \tilde{Y}_l(\omega) = A_l \delta(\omega - \omega_l) (\cos \phi_l + i \sin \phi_l) \quad (6)$$

ここに、 $\tilde{Y}(\omega)$ は $Y(t)$ のフーリエ変換、 $E(t)$ と $\varphi(t)$ は複素包絡線関数の振幅と瞬間位相で次式のようなになる。

$$\left(\frac{E(t)}{\Delta f} \right)^2 = \left(\sum_{l=-N/2+1}^{N/2} A_l \cos(\omega_l t + \phi_l) \right)^2 + \left(\sum_{l=-N/2+1}^{N/2} A_l \sin(\omega_l t + \phi_l) \right)^2 = \sum_{l=-N/2+1}^{N/2} \sum_{k=-N/2+1}^{N/2} A_l A_k \cos\{(\omega_l - \omega_k)t + (\phi_l - \phi_k)\}$$

$$\tan \varphi(t) = \frac{\sum_{l=-N/2+1}^{N/2} A_l \sin(\omega_l t + \phi_l)}{\sum_{l=-N/2+1}^{N/2} A_l \cos(\omega_l t + \phi_l)} \quad (7)$$

キーワード 瞬間周波数、群遅延時間、ヒルバート変換、解析関数、複素包絡線関数

連絡先 〒611-0011 宇治市五ヶ庄 京都大学防災研究所 TEL:0774-38-4065

瞬間位相の時間に関する一階微分は瞬間周波数となり次式で与えられる。

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\sum_{l=-N/2+1}^{N/2} \sum_{k=-N/2+1}^{N/2} A_l \omega_l A_k \cos\{(\omega_l - \omega_k)t + (\phi_l - \phi_k)\}}{\sum_{l=-N/2+1}^{N/2} \sum_{k=-N/2+1}^{N/2} A_l A_k \cos\{(\omega_l - \omega_k)t + (\phi_l - \phi_k)\}} \quad (8)$$

3. 因果時間関数の表現法と群遅延時間の誘導

周波数領域で実関数のフーリエスペクトルが次式のように定義されているとする。

$$F(\omega) = \sum_{l=-N/2+1}^{N/2} a_l \cos(\omega t_l + \phi_l) \Delta t \quad (9)$$

ここに、 a_l と ϕ_l は時刻 t_l における信号の瞬間振幅と瞬間位相である。いま、 $F(\omega)$ の周波数領域におけるヒルバート変換を $\hat{F}(\omega)$ とすれば、それは、 $F(\omega)$ のフーリエ逆変換 $f(t)$ を求め、それに $\text{sgn}(t)$ を乗じたものを $\hat{f}(t)$ とし、それをフーリエ変換することにより以下のように求められる。

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{l=-N/2+1}^{N/2} \frac{a_l \Delta t}{2} \{\delta(t+t_l) + \delta(t-t_l)\} \cos \phi_l - \sum_{l=-N/2+1}^{N/2} \frac{a_l \Delta t}{2i} \{\delta(t+t_l) - \delta(t-t_l)\} \sin \phi_l \\ \hat{f}(t) &= \sum_{l=-N/2+1}^{N/2} \frac{a_l \Delta t}{2} \{\delta(t+t_l) - \delta(t-t_l)\} \cos \phi_l - \sum_{l=-N/2+1}^{N/2} \frac{a_l \Delta t}{2i} \{\delta(t+t_l) + \delta(t-t_l)\} \sin \phi_l \\ \hat{F}(\omega) &= -i \sum_{l=-N/2+1}^{N/2} a_l \sin(\omega t_l + \phi_l) \Delta t \end{aligned} \quad (10)$$

いま、複素フーリエスペクトルとして $F(\omega)$ と $\hat{F}(\omega)$ の和で表現される次式を考える。

$$F_c(\omega) = F(\omega) + \hat{F}(\omega) = A(\omega) \exp(i\phi(\omega)) \quad (11)$$

ここに、 $A(\omega)$ と $\phi(\omega)$ はフーリエ振幅スペクトルと位相スペクトルである。これらは次式のように表現できる。

$$\begin{aligned} \left(\frac{A(\omega)}{\Delta t}\right)^2 &= \left(\sum_{l=-N/2+1}^{N/2} a_l \cos(\omega t_l + \phi_l)\right)^2 + \left(\sum_{l=-N/2+1}^{N/2} a_l \sin(\omega t_l + \phi_l)\right)^2 = \sum_{l=-N/2+1}^{N/2} \sum_{k=-N/2+1}^{N/2} a_l a_k \cos\{(t_l - t_k)\omega + (\phi_l - \phi_k)\} \\ \tan \phi(\omega) &= - \frac{\sum_{l=-N/2+1}^{N/2} a_l \sin(\omega t_l + \phi_l)}{\sum_{l=-N/2+1}^{N/2} a_l \cos(\omega t_l + \phi_l)} \end{aligned} \quad (12)$$

位相スペクトルの周波数に関する一階微分は群遅延時間を表すが、その解析的な表現は次式で与えられる。

$$\frac{\partial \phi}{\partial \omega} = - \frac{\sum_{l=-N/2+1}^{N/2} \sum_{k=-N/2+1}^{N/2} a_l t_l a_k \cos\{(t_l - t_k)\omega + (\phi_l - \phi_k)\}}{\sum_{l=-N/2+1}^{N/2} \sum_{k=-N/2+1}^{N/2} a_l a_k \cos\{(t_l - t_k)\omega + (\phi_l - \phi_k)\}} \quad (13)$$

4. 考察とまとめ

以上瞬間周波数や群遅延時間の具体的な表現法を誘導したが、**2**の結果は解析関数を定義することによって求められるものと同等であり、**3**での結果は、瞬間位相をすべてゼロとすると、時系列 $f(t)$ が振幅が時刻とともに変化する因果的なインパルス列から構成されるものと同等であることが判明した。