

離散作用素積分法を利用した時間領域境界要素法の解析

福井大学大学院 学生会員 ○ 岡山 美央
福井大学工学部 正会員 福井 卓雄

1 はじめに

本研究は, Lubich の離散作用素積分法 (Operational Quadrature Method) による, 波動問題の時間領域境界要素法の開発を目的とする。

時間領域問題における境界積分方程式は, 時間においては Volterra 型, 空間においては Fredholm 型の積分方程式である。これを数値的に解くために, 時間および空間次元において離散化を行う必要がある。時間次元の離散化は, Volterra 型の積分方程式を解くために, 適切な時間軸上の近似を導入し, もとの方程式を逐次的に解くことのできる Fredholm 型の境界積分方程式群に帰着させる。従来の離散化手法による解析においては, 時間増分が小さいときの安定性に問題があることが指摘されてきた。

時間領域境界要素法への離散作用素積分法の適用については, すでに, Lubich[2] や Schanz & Antes[3] の研究があり, 安定性が改善されることが報告されている。ここでは, Lubich の離散作用素積分法およびその時間領域境界要素法への適用について紹介し, 波動散乱問題を対象とした数値解析例を示す。

2 離散作用素積分法

Lubich[1] は, 繰込み積分

$$f * g(x) = \int_0^x f(x-t)g(t) dt \quad (x \geq 0) \quad (1)$$

の近似値を離散化繰込み積分

$$\sum_j \omega_{n-j}(\Delta t) g(j\Delta t) \quad (2)$$

により計算する方法として, f の Laplace 変換を導入し, 一部の積分を差分解に置き換えることによって, 重みを決定する方法を提案した。重み $\omega_j(\Delta t)$ は

$$F\left(\frac{\delta(\zeta)}{\Delta t}\right) = \sum_{j=0}^{\infty} \omega_j(\Delta t) \zeta^j \quad \text{あるいは} \quad \omega_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=\rho} F\left(\frac{\delta(\zeta)}{\Delta t}\right) \zeta^{-n-1} d\zeta \simeq \frac{\rho^{-n}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} F\left(\frac{\delta(\zeta_l)}{\Delta t}\right) e^{-2\pi i n l / L} \quad (3)$$

により与えられる。ここに, F は f の Laplace 変換であり, $\delta(\zeta) = \sum_{j=0}^{\infty} \delta_j \zeta^j$ は利用する差分法 (線形マルチステップ法) の生成多項式の商である。また, $\zeta_l = \rho e^{2\pi i l / L}$ である。

3 時間領域境界要素法への応用

離散作用素積分法を時間領域境界積分方程式

$$C(\mathbf{x})u(\mathbf{x}, t) = \int_{\partial B} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) * s(\mathbf{y}, t) dS_y - \int_{\partial B} S(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) * u(\mathbf{y}, t) dS_y \quad (4)$$

に適用する。まず, 空間領域の近似基底 ϕ_i を導入して, 境界関数を

$$u(\mathbf{x}, t) = \sum_i \phi_i(\mathbf{x}) u_i(t), \quad s(\mathbf{x}, t) = \sum_i \phi_i(\mathbf{x}) s_i(t) \quad (5)$$

で近似する。 u_i, s_i は境界値の時間関数である。上式および (2) を (4) に代入すれば

$$C(\mathbf{x}_i) \sum_m \phi_m(\mathbf{x}_i) u_m(n\Delta t) = \sum_j \sum_{k=0}^{n-1} A_j^{n-k}(\mathbf{x}_i) s_j(k\Delta t) - \sum_j \sum_{k=0}^{n-1} B_j^{n-k}(\mathbf{x}_i) u_j(k\Delta t) \quad (6)$$

キーワード：離散作用素積分法, 時間領域境界要素法, 波動問題

連絡先：〒910-8507 福井市文京 3-9-1 TEL0776-27-8596 FAX0776-27-8746

となる。ここに、影響関数 A_i^{n-k} , B_i^{n-k} は

$$A_i^{n-k}(\mathbf{x}) = \frac{\rho^{-(n-k)}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \int_{\partial B} \hat{G} \left(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \frac{\delta(\zeta_l)}{\Delta t} \right) \phi_i(\mathbf{y}) e^{-2\pi i(n-k)l/L} dS_y \quad (7)$$

$$B_i^{n-k}(\mathbf{x}) = \frac{\rho^{-(n-k)}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \int_{\partial B} \hat{S} \left(\mathbf{x}; \mathbf{y}, \frac{\delta(\zeta_l)}{\Delta t} \right) \phi_i(\mathbf{y}) e^{-2\pi i(n-k)l/L} dS_y \quad (8)$$

である。上式の $\hat{G}$, $\hat{S}$ は、それぞれ G , S の Laplace 変換である。また、和の計算は FFT を使えば高速に計算することができる。以上によって、通常の離散化手法を用いる場合と同様に、時間領域境界要素法を構成することができる。

4 数値解析

弾性体の面外波動問題を扱う。2次元波動問題であるので、 $\hat{G}$, $\hat{S}$ は変形 Bessel 関数により表される。また、離散化のための差分公式として、2次の前進差分を用いた。ここでは、半径 a の円形の空洞に平面波が入射するときの散乱問題の解析例を示す。入射波としては応力ステップ波を用いた。図において A , B , C は境界上の代表点で、入射点からの角度が 0 , $\pi/2$, π の点である。規準時間を、平面波が空洞を通過する時間 $T_0 = 2a/c_T$ とし、境界上の節点は $I = 32$ で、節点間隔は $\Delta s = \pi a/16$ である。時間増分は $\Delta t = T_0/32$ とした。

図-1 は、面外せん断波が入射したときの境界上の代表点の変位の履歴である。両者を比較すると、ほぼ同様な解析結果

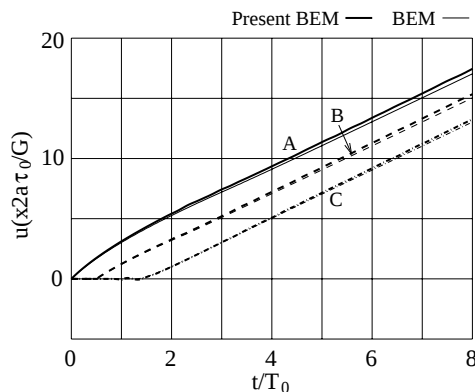


図-1 面外せん断波が入射したときの境界上の代表点の変位の履歴

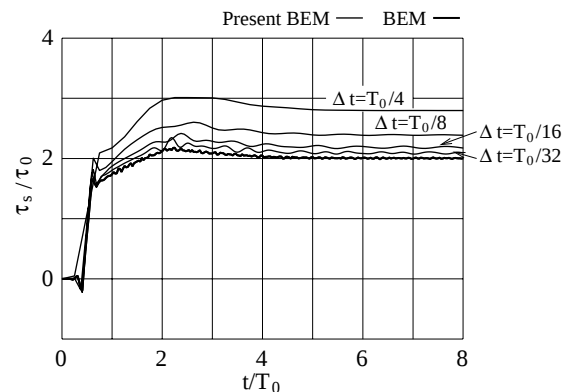


図-2 面外せん断波が入射したときの境界上の B 点の接線方向応力の比較

を示しているが、Lubich の方法の方が傾きが少し大きい。図-2 は、面外せん断波が入射したときの境界上の B 点の接線方向応力の比較である。Lubich の方法では、時間増分 Δt が小さくなるほど、従来の方法の解析結果に近い値を示している。

5 おわりに

離散作用素積分法を時間領域境界要素法に適用し、2次元波動問題において数値解析を行った。解析結果は満足できるものであり、小さい時間増分についても安定な解が得られた。

本解析法の利点として、(1) 粘弾性体や Biot 物体など時間領域基本解が容易に求められない問題へも適用できること、(2) 計算に高速多重極法を利用できる可能性があることが挙げられる。とくに、後者については、時間領域の大規模問題解析の一つの道を開くものであり、現在この方向への研究を進めている。

参考文献

- [1] C. Lubich : Convolution quadrature and discretized operational calculus I, *Mumer. Math.*, **52**, pp. 129-145, 1988.
- [2] C. Lubich : On the multistep time discretization of linear initial-boundary value problems and their boundary integral equations, *Mumer. Math.*, **67**, pp. 365-389, 1994.
- [3] M. Schanz and H. Antes : A new visco- and elastodynamic time domain boundary element formulation, *Comput. Mech.*, **20**, pp. 452-459, 1997.