# Helmholtz 要素の境界条件考察

IMI 計算工学研究室　**今村 純也**

## １. 背景と目的

**１.１ Helmholtz の定理**　「任意のベクトル場 $\boldsymbol{U}$ は一般にスカラーポテンシャル $\phi$ とベクトルポテンシャル $\boldsymbol{\psi}$ によって、$\boldsymbol{U}=grad\,\phi+curl\,\boldsymbol{\psi}$ $(div\,\boldsymbol{\psi}=0)$ のごとく表わされる」と定義[1]される。これによれば、非圧縮流の流れ場は $\boldsymbol{U}=curl\,\boldsymbol{\psi}$ で表わされ、非圧縮超弾性体の変位場 $\boldsymbol{U}$ も同様に $\boldsymbol{U}=curl\,\boldsymbol{\psi}$ で表わされる。

**１.２ Helmholtz 分解の利点**　$\boldsymbol{U}$ が３成分であるのに対し、物理現象を $\phi$ と $\boldsymbol{\psi}$ の合計４成分で記述することで「回転なしの体積変形」と、反対に「体積変化なしのソレノイダル」に代数的に分解できる。

３自由度の $\boldsymbol{U}$ を基底関数とする有限要素では非圧縮材料 locking や shear locking 問題が生じ、Helmholtz 分解することでこれらは解消される。これらは過拘束問題と呼ばれるが、むしろ過少自由度問題と解すべきである。

後者は１Ｄの梁で説明[2]されるが、原因は曲げ変位の基底関数のみで表わすことにあり、せん断変位の基底関数を加えれば解決する。２Ｄから１Ｄへの次元の集約は平面保持仮定によるが、曲げ変位は中立軸面で逆対称な体積変形によって生じ､かつ桁成 $a$ の３乗に反比例する。せん断変位は $a$ に反比例するので後者を前者と同じたわみ関数で記述するには $1/a^2$ の項が表われ shear locking 問題が生じる。よって、両の問題の原因は同じであり、いずれも過少自由度問題と解すのが妥当と考える。

**１.３ その他の問題でも**　St.Venant の適合条件式は応力レベルの微分をノード未知数に選ぶハイブリッド法で必要となる。これは６個のひずみ成分が３自由度の $\boldsymbol{U}$ で表わされていること[3]によるが、体積変形の内部エネルギーを Helmholtz 分解すれば､湧き出しの場合と同様､１変数で括り出して表現でき､適合条件式は不要となる。

このほか、せん断振動のみ取り出して解析可能なことや、ソレノイダルとポテンシャル流を壁面で non-slip と slip 条件にそれぞれ分離して境界条件を与えられるなど、力学的整合性の高い表現が可能となる。

**１.４ 目 的**　著者はこれらの利点に着目して、基底関数を Helmholtz 表示した $C_1$ 連続な要素法を報告[4][5] してきた。しかし、一般には次の点で疑問を抱かれるようである。すなわち、①ノード未知数に含まれる $\boldsymbol{\psi}^{(000)}$ の境界条件をどのように与えるのか？ ②Coulomb の gauge $(div\,\boldsymbol{\psi}=0)$ をどのように満足させるのか？の２点である。

本稿ではこれらについて考察し、その解決法を示す。

## ２. Helmholtz 要素法および考察

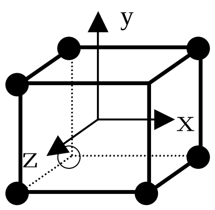
２.１ **程方式**　$U_i$ は Helmholtz 要素表現された流速、$\tau_{ij}$ は応力、$P$ は圧力とし、密度は基準化して表して、連続の式は(1)式、運動方程式は(2)式とする。

連続の式：
$$div\,\boldsymbol{U}=0 \tag{1}$$

運動方程式：
$$\frac{\partial U_i}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_j}(U_iU_j-\tau_{ij})+\frac{\partial P}{\partial x_i}=0 \tag{2}$$

ただし、$\boldsymbol{U}\equiv curl\,\boldsymbol{\psi}$ , $div\,\boldsymbol{\psi}=0$ (Coulomb の gauge)

２.２ **有限要素**　流速 $U_i$ の基底関数 $\boldsymbol{\psi}_i$ は３重３次式の $C_1$ 連続要素（図１）とする。圧力 $P$ も同様とする。




$f\equiv\boldsymbol{\psi}_i$ （$P$ も同様）とし、$f$ のノードベクトルは

●：$\{f^{(000)}, f^{(100)}, f^{(001)}, f^{(101)}, f^{(010)}, f^{(110)}, f^{(011)}, f^{(111)}\}$

図－１ 六面体要素のノード配置

**２.３ $\boldsymbol{\psi}$ の境界条件考察**

基本境界条件の与え方について考察する。先ず $x$-$y$ 面内の２Ｄの例で考える。基本境界上で流速はゼロであるから、$\boldsymbol{\psi}_3$ の勾配はゼロであり、且つ境界ノード上の $\boldsymbol{\psi}_3$ はすべて等しくなくてはならない。そこで、$\boldsymbol{\psi}_{3,k}=\boldsymbol{\psi}_{3,k+1}$, $\boldsymbol{\psi}_{3,k+1}=\boldsymbol{\psi}_{3,k+2}$,…を連立方程式に組み込んで解く。ただし、添え字 $k$ は境界上ノードの連続番号とする。

３Ｄでも同様に $\boldsymbol{\psi}$ はそれぞれ等しいと置いて境界条件を満足させる。ただし、流速は $\boldsymbol{\psi}$ の相対量のみであるから、圧力同様、系の１点で固定する。

２.４ Coulomb **の** gauge **考察**　先ず流速 $\boldsymbol{U}$ と渦度 $\boldsymbol{\omega}$ $(\equiv curl\,\boldsymbol{U})$ の関係について考察する。

Helmholtz 表示、有限要素、境界条件、Coulomb の gauge
〒351-0114 和光市本町 31-9-803 , Tel&Fax.048-465-8148　E-mail: jimamura@ra2.so-net.ne.jp

***U***が連続式を満足しているかどうかに関係なく***ω*** は非圧縮の回転成分のみで、且つ***U***で表わされた***ω*** はソレノイダル条件(*curl* ***ω****=0*)を満足している。これを***ψ***と***U***の関係に置き替えると、***ψ*** が gauge 条件を満足しているかどうかに関係なく***U***は非圧縮の回転成分のみで、且つ***ψ*** で表わされた***U*** は連続条件を満足する。

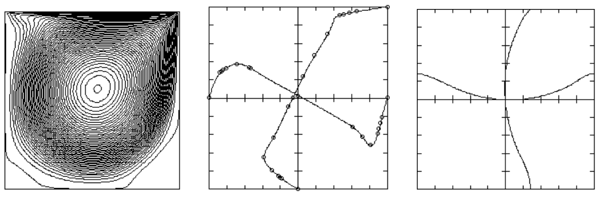
したがって、非圧縮に必要な条件はすでに整っていることになり、***ψ*** が gauge 条件を満足することは必ずしも要求されない。

gauge 条件は、例えば$U_1$（$\equiv \boldsymbol{\psi}_3^{(010)} - \boldsymbol{\psi}_2^{(001)}$）の成分$\boldsymbol{\psi}_3^{(010)}$ の *z* 方向勾配$\boldsymbol{\psi}_3^{(011)}$を、*y* 方向に積分したときの積分定数$\boldsymbol{\psi}_3^{(001)}$が満足すべき条件と解釈でき、ノード上で$\boldsymbol{\psi}_3^{(001)} = -\boldsymbol{\psi}_1^{(100)} - \boldsymbol{\psi}_2^{(010)}$としてノード未知数の成分のひとつ$\boldsymbol{\psi}_3^{(001)}$を消去することで満足させる。

## 3．数値計算例

**3.1　境界条件設定法の検証**　　*Re* 数＝1000 の２Ｄキャビティフローで$\boldsymbol{\psi}_3$ の固定点を系の幾何学的中心点に選んで検証した。要素数は 21×21 (1/40×2+1/20×38 の分割)要素で、Δt＝1/100 とした。移動壁速度は端の要素で 3 次補間して立ち上げ、ノード点で流速を境界値として与えた。(隅で $u=0, v=0$ であり、隅点の噴流を防止)

t=40 のほぼ定常状態を図２に示す。図の(a)は$\boldsymbol{\psi}_3$ のコンター、(b)は流速プロファイルであり、いずれも Ghia ら[6]とよく一致している。(c)は$\boldsymbol{\psi}_3$のプロファイルであるが、設定どおり計算されており、考察どおりである。なお、(a)図の最外側の等高線は境界上で値がゼロでないため、丁度等高線を含むなだらかな勾配が描かれたもの。



(a) $\boldsymbol{\psi}_3$ｺﾝﾀｰ　(b) 流速ﾌﾟﾛﾌｧｲﾙ　(c) $\boldsymbol{\psi}_3$ﾌﾟﾛﾌｧｲﾙ

図２　２Ｄキャビティフロー( Re=1000, ○は Ghia et al.)

**3.2　Coulomb の gauge 設定法の検証**　　*Re* 数＝400 の３Ｄキャビティフローを数値計算した。可視化実験結果[7]（Ghia らの結果にほぼ同じ）と照合して検証することとし、実験に合わせて形状を設定した。すなわち、1：1：6 であり、対称条件を入れて 1：1：3 で計算した。なお、流体では本来対称条件はないが、低レイノルズ数では対称性を示すのでこれを入れた。固体での対称性検証の代替例としても位置付けられる。

２Ｄキャビティを *x-y* 面とすれば、*z* 方向にその一辺の３倍長の奥行きを付けた形で解析した。すなわち、移動面を *x-z* 面とした。ただし、作図は *z* 方向を 1/3 に縮尺して他の辺と同じ長さにしている。視点は図３とする。要素数は 8×8×8 (1/14×2+1/7×6 分割)、Δt＝1/100 とした。

$U_1$ ,$U_2$のプロファイルを Ghia らの結果とともに図４の(a)に示す。両者ともよく一致していることが判る。

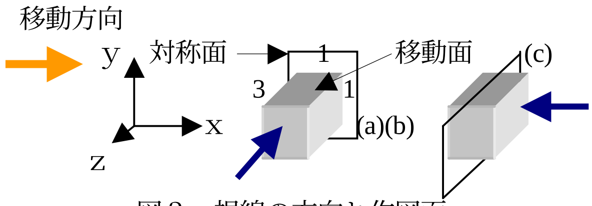
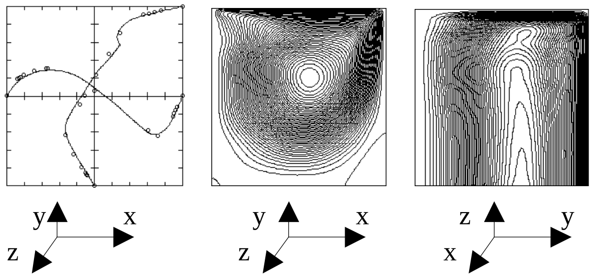



図３　視線の方向と作図面




(a) *x-y* 面流速ﾌﾟﾛﾌｧｲﾙ (b) *x-y* 面$\boldsymbol{\psi}_3$ｺﾝﾀｰ (c) *y-z* 面$\boldsymbol{\psi}_3$ｺﾝﾀｰ

図４　幾何学中心面図（Re=400,t=20,○は 2D の Ghia et al.）

## ４．まとめ

Helmholtz 表示要素の境界条件と Cloulomb の gauge について考察し、その設定法を提案した。提案の方法は数値計算例によって安定的に作動することを検証した。

なお、2.3 に述べた境界条件を組み込んで連立方程式を解くには数値上の工夫が必要であり、任意境界形状への適合も含め、ボクセル解析技法として別途報告する予定。

### 参考文献

(1) 例えば "数学ハンドブック" 丸善, (1960), pp. 258.
(2) 久田，野口, "非線形有限要素法の基礎と応用" 丸善，第２刷、(1999), pp. 212-214.
(3) 坪井善勝, "建築弾塑性学" 彰国社，建築学大系 9-Ⅰ,(1968), pp. 190.
(4) 今村，棚橋, "基礎変数表示の流れから偽ポテンシャル成分を控除する方法による非圧縮流体の数値解法" 計算工学講演会論文集, 第５巻第１号、(2000), pp. 159.
(5) 今村, "$C_1$連続な FEM モデルの非圧縮流体への適用" 第 11 回数値流体力学講演論文集,(1997) , pp.567
(6) U.Ghia,K.N.Ghia and C.T.Shin "High-Re Solutions for Incompressible Flow using the Navier-Stokes Equations and a Multigrid Method", Journal of Computational Physics 48, (1982), pp387-411
(7) 望月・山辺・山田, "二次元キャビティ内の流れ（可視化実験）" 日本機械学会論文集(B)52 巻 476 号,(1986),pp1589-1592