

Level Set法を用いた並列有限要素法による自由表面流れ解析

中央大学 学生員 ○羽田康浩

日本工営株式会社 正会員 桜庭雅明

中央大学 正会員 檜山和男

1. はじめに

自由表面流れの数値解析は、固定メッシュを用いて自由表面を間接的に表現する方法（界面捕捉法）と移動メッシュを用いて自由表面を直接的に表現する方法（界面追跡法）に大別される。碎波等を含む複雑な自由表面問題の解析には、界面捕捉法が有効であるとされてきたが、この方法は界面追跡法に比べ、界面近傍での計算精度が低く、また、より細かい有限要素分割を必要とするため計算時間及び計算機容量に問題を抱えていた。

本報告では、上記の問題点を克服するために、界面捕捉法の一つである Level Set 法¹⁾を用いて界面近傍の精度を高め、並列有限要素法を導入することにより計算機容量の削減を行った。数値解析例としては3次元スロッシング問題について解析を行い、既存の計算手法及び実験結果との比較と計算効率の両者の観点で考察を行った。

2. 流れ場の計算

本手法の流れ場の計算における基礎方程式は、Navier-Stokes の運動方程式 (1) と連続式 (2) を用いる。

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad \text{in } \Omega \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (2)$$

ここに、 $\mathbf{u}$, p は流速、圧力、 $\mathbf{f}$ は外力ベクトル、 ρ は密度を表す。なお、 $\boldsymbol{\sigma}$ は応力テンソルであり、次式のようになる。

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D}(\mathbf{u}) \quad (3)$$

$$\mathbf{D}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T) \quad (4)$$

ここに、 μ は粘性係数である。式 (1) と式 (2) の数値解析手法として、安定化有限要素法 (SUPG/PSPG 法)²⁾を用いた。時間方向の離散化には Crank-Nicolson 法を適用し、圧力及び連続式は陰的に取り扱った。

3. 自由表面の計算

本手法では Level Set 法を用いて自由表面を捕捉している。自由表面から等距離になるような距離関数 (Level Set 関数) を与えて次式の移流方程式 (5) を用いて流れ場の値に従い界面を移動させる。

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla F = 0 \quad (5)$$

ここに、 F は距離関数として各点に符号付きで定義され、 $F = 0$ の等値面を界面とする。式 (5) の数値解析手法として、CIVA 法³⁾を用いた。なお、距離関数は次式に示す

Heaviside 関数を用いて、界面周辺をスムージング処理を行う。

$$H_{\tilde{a}} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\tilde{a}}{\sqrt{\tilde{a}^2 + \epsilon^2}} \right) \quad (6)$$

ここに、 $\tilde{a}$ は計算格子幅の数倍となる任意の値である。Heaviside 関数を用いて、液体及び気体の密度と粘性係数は次式のようになる。

$$\rho = 0.5(\rho_{\text{Liq}} + \rho_{\text{Gas}}) + 0.5(\rho_{\text{Liq}} - \rho_{\text{Gas}})H_{\tilde{a}} \quad (7)$$

$$\mu = 0.5(\mu_{\text{Liq}} + \mu_{\text{Gas}}) + 0.5(\mu_{\text{Liq}} - \mu_{\text{Gas}})H_{\tilde{a}} \quad (8)$$

ここに、添字 Liq は流体、Gas は気体を表す。

(1) 再初期化の計算

Level Set 法は時間が進むにつれ液相が大きく移動するため、距離関数の性質が失われ、計算が不安定になる。この距離関数の性質を回復するために以下に示す距離関数方程式を用いて、再初期化⁴⁾を行う。

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{w}_s \cdot \nabla F = S(F) \quad (9)$$

$$\mathbf{w}_s = S(F) \frac{\nabla F}{|\nabla F|} \quad (10)$$

$$S(F) = 2H_{\tilde{a}} \quad (11)$$

ここに、 t は再初期化計算を行うための時刻であり、 $S(F)$ は符号関数を表し、界面上で $S(F) = 0$ となる。

(2) 体積補正の計算

再初期化操作は Level Set 関数の性質を均一に保つことができるが、これにより液体の体積が減少する可能性が高くなる。これを回避するために体積を補正する方法を導入する。体積補正の計算式は、体積保存率に流速プロファイル ϵ_a を乗ずるものとして以下のようになる。

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{w}_h \cdot \nabla F = 0 \quad (12)$$

$$\mathbf{w}_h = \epsilon_a \frac{\mathbf{u}}{V_{\text{init}}} \cdot \frac{\nabla F}{|\nabla F|} \quad (13)$$

ここに、 V , V_{init} は各時刻における液体の体積及び初期体積、 ϵ_a は近似デルタ関数であり $dH_{\tilde{a}} = dF$ で表せる。

(3) CIVA 法による界面捕捉

式 (5)、式 (9)、式 (12) の計算法としては、移流方程式の解の精度が高く保証される CIVA 法³⁾を用いた。CIVA 法では、各節点の時刻 $t + \Delta t$ の厳密解を上流側の $\mathbf{x} - \mathbf{u} \Delta t$ 地点での値で近似する。移流方程式の解に関する内挿多項式は、面積座標を用いた場合、次式のように表現することができる。

$$(L^{\epsilon F})(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N \tilde{a}_i L_i(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1(j \neq k)}^N \tilde{a}_{jk} L_j(\mathbf{x}) L_k(\mathbf{x}) [1 + L_k(\mathbf{x}) - L_j(\mathbf{x})] \quad (14)$$

Key Word: 並列化有限要素法, Level Set 法, 自由表面流れ解析

〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27

TEL 03-3817-1815, FAX 03-3817-1803

ここに、 L は面積座標である。また、 $\tilde{a}_i$ と $\tilde{a}_{jk}$ は係数であり、節点での値とその微係数の連続条件より以下のように求めることができる。

$$\begin{aligned} \tilde{a}_i &= F_i \\ \tilde{a}_{jk} &= F_i \ddot{A} F_k + \sum_{l=1}^{\infty} (\mathbf{x}_{k;l} \ddot{A} \mathbf{x}_{j;l}) F_j^{(l)} \end{aligned} \tag{15}$$

ここに、 $F^{(l)}$ は微係数を表す。

4. 並列計算手法

本研究では、分散メモリ型並列計算機を用いた領域分割法に基づく並列計算手法⁵⁾を導入している。各プロセッサは、割り当てられた部分領域のデータしか記憶しておらず、省メモリに計算を行う事ができる。連立1次方程式を解く過程で、プロセッサ間で通信を行っており、通信ライブラリーには機種依存性のないMPI (Message Passing Interface) を用いている。なお、並列計算機は8台のPC(Alpha 600MHz)をEthernetで接続した、PCクラスター型並列計算機を使用した。

5. 数値解析例

本手法の計算精度と並列化効率を検討するために、矩形タンクのスロッシング解析を行った。図-1に示すように、1:0m 0:1m 1:0mの貯水槽の中に50%貯まった流体に水平加振力を与える。要素分割は、節点数15606、要素数75000とした。時間増分量は $\Delta t = 1.0 \times 10^{-3}$ secとし、液体には水（密度998.0kg/m³、粘性係数1.01 $\times 10^{-3}$ Ns/m²）、気体には空気（密度1.205kg/m³、粘性係数1.81 $\times 10^{-5}$ Ns/m²）を仮定した。入力波として式(16)を与えた。

$$F_x = \ddot{A} a w^2 \sin w t \tag{16}$$

ここに、振幅 $a = 0.0093$ m、角振動数 $w = 5.311$ rad/秒を用いている。なお、境界はすべて固体壁としfree-slip条件を与えた。

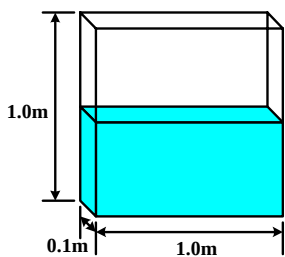


図-1 解析モデル

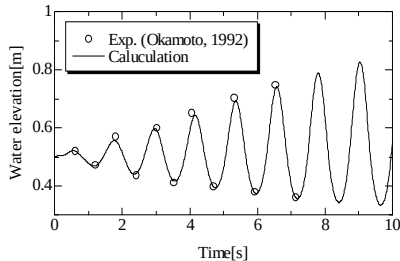


図-2 実験結果との比較

図-3は各時刻ステップにおける解析結果（流体領域の形状）を示し、図-2は既存の実験結果⁶⁾と本手法による計算比較をしたものを示す。図-3から、安定に計算できていることが確認できる。また、図-2より、実験結果と多少のずれはあるが、ほぼ一致をしていることがわかる。次に、本手法の並列化効率を検討するために、解析メッシュを要素数が一定になるように1、2、4、8分割し、並列化効率を測定した。図-4は演算速度倍率と並列化効率を示している。図を見ると高い効率が得られているのが分かる。

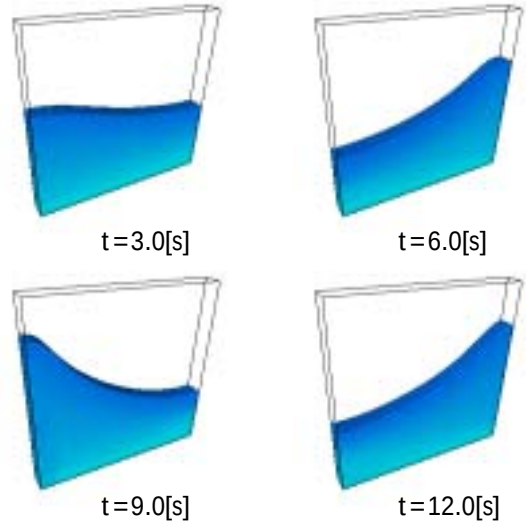


図-3 液体形状の時刻暦

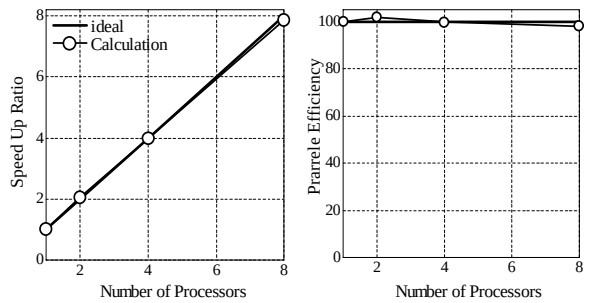


図-4 演算速度倍率(左図)と並列化効率(右図)

6. おわりに

本論文では、並列有限要素法を用いたLevel Set法による自由表面流れ解析手法について、計算精度の確認と、並列化効率の検討を行い、以下のような結論を得た。

● 本手法による計算結果と既往の実験結果を比較した結果、両者はほぼ一致しており計算精度の観点から本手法の有効性が確認できた。

● 本手法は高い効率を得られ、大規模計算への有効性を示した。

今後は、各種の任意領域を有する問題への適用を行う予定である。

参考文献

- 1) Sussman, M. and Smereca P., Osher, S., "A Level Set Approach for Computing Solutions for Incompressible Two-Phase Flow," J. of Comput. Physics, 144, (1994), pp.146-159.
- 2) Tezduyar, T. E., "Stabilized finite element formulations for incompressible flow computations," Advanced in Applied Mechanics, 28, (1991), pp.1-44
- 3) 田中, "数値流体力学のための高精度メッシュフリー手法の開発," 日本機械学会論文集 B 編, 64 巻 620 号, (1998), pp.1071-1078.
- 4) Chang, Y. C. and Hou, T. Y., Merriman, B., Osher, S., "A Level Set Formulation of Eulerian Interface Capturing Methods for Incompressible Fluid Flows," J. of Comput. Physics, 124, (1996), pp.449-464.
- 5) 桜庭, 田中, 玉城, 樫山, "大規模自由表面流れ解析のための ALE 並列有限要素法," 応用力学論文集, 2, (1999), pp.233-240.
- 6) 岡本, "任意ラグランジュ・オイラー有限要素法による大振幅スロッシング解析に関する研究," 中央大学学位論文, (1992)