HPMの異方性要素による応力解析

○法政大学　学生会員　大木　裕久
法政大学　　正会員　竹内　則雄
（株）竹中工務店技術研究所　　正会員　上林　厚志

１．はじめに

線形弾性モデルは，有限要素法の適用において用いられる構成法則であり，材料が等方等質のものであれば応力-ひずみ関係式は一般化されたフックの法則に従う．しかし，直交異方性体に対しては，弾性マトリックスを変更しる必要がある．本論文では，ハイブリッド型の仮想仕事の原理にペナルティを導入したハイブリッド型ペナルティ法(Hybrid-type Penalty Method:HPM)の弾性マトリックスを変更し，異方性要素の導入を試みた．

２．ハイブリッド型仮想仕事の原理

図１に示す領域Ωは閉境界$\Gamma^{(e)}$で囲まれたM個の部分領域$\Omega^{(e)}$から構成されているものとする．この時，幾何学的境界条件を満たす仮想変位δuを乗じて領域Ωについて積分し，ガウスの発散定理を用いると，仮想仕事式は各部分領域の和として下記のように表わせる．ただし，境界Γ_u上で，仮想変位$\delta u = 0$である．

$$\sum_{e=1}^{M}\left(\int_{\Omega^{(e)}}[\boldsymbol{L}\delta\boldsymbol{u}]^t\boldsymbol{\sigma}d\Omega-\int_{\Omega^{(e)}}\delta\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{f}d\Omega\right)-\int_{\Gamma_{<s>}}\delta\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{T}d\Gamma=0 \tag{1}$$

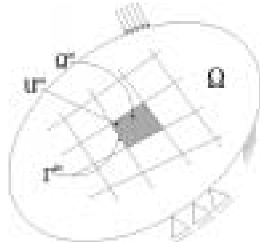

図１　部分領域$\Omega^{(e)}$と閉境界$\Gamma^{(e)}$

また，**図２**に示すように，隣接する２つの部分領域$\Omega^{(a)}$と$\Omega^{(b)}$の共通の境界を$\Gamma_{<ab>}$とする．ハイブリッド型の仮想仕事の原理では，境界において式(2)の付帯条件を*Lagrange*の未定乗数$\boldsymbol{\lambda}$を用いて式(1)に示した仮想仕事式に導入する．

$$u^{(a)}_{<ab>}=u^{(b)}_{<ab>}\qquad on\Gamma_{<ab>} \tag{2}$$

ここで，式(2)の$u^{(a)}_{<ab>}$ならびに$u^{(b)}_{<ab>}$は部分領域$\Omega^{(a)}$と$\Omega^{(b)}$における境界$\Gamma_{<ab>}$上の変位を表している．いま，隣接する２つの要素境界面数をNとするとハイブリッド型の仮想仕事式は式(3)のように表すことができる．

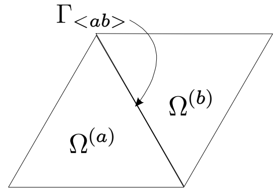

図２　部分領域$\Omega^{(a)},\Omega^{(b)}$の共通の境界$\Gamma_{<ab>}$

$$\sum_{e=1}^{M}\left(\int_{\Omega^{(e)}}[\boldsymbol{L}\delta\boldsymbol{u}]^t\boldsymbol{D}[\boldsymbol{L}\boldsymbol{u}]d\Omega-\int_{\Omega^{(e)}}\delta\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{f}d\Omega-\int_{\Gamma_{<s>}}\delta\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{T}d\Gamma\right)-\sum_{s=1}^{N}\left(\delta\int_{\Gamma_{<s>}}\boldsymbol{\lambda}^t(\boldsymbol{u}^{(sa)}_{<s>}-\boldsymbol{u}^{(sb)}_{<s>})d\Gamma\right)=0 \tag{3}$$

本手法では，部分領域$\Omega^{(e)}$内のある１点$P(x,y)$における剛体変位，剛体回転$\boldsymbol{d}^{(e)}$に加え，直接，部分領域内で一定なひずみ$\boldsymbol{\varepsilon}^{(e)}$を用いて式(4)のような線形変位場を仮定する．ここで，上付きの(e)は部分領域を意味する．

$$\boldsymbol{u}^{(e)}=\boldsymbol{N}_d{}^{(e)}\boldsymbol{d}^{(e)}+\boldsymbol{N}_\varepsilon{}^{(e)}\boldsymbol{\varepsilon}^{(e)} \tag{4}$$

このように，本論文で用いる変位場は，部分領域内における１点の剛体変位と剛体回転に加え，直接，ひずみを自由度として扱う．また，各部分領域内の１点におけるパラメータを用いて部分領域内の変位場を表しているため，従来の変位型FEMとは異なり，節点において変位を共有しない．すなわち節点は領域形状を認識するためであって，自由度を設けるためではない．RBSMでは，表面力と相対変位の間にばねの概念を導入し，ばねによる表面力の仕事を用いて全体のエネルギーを評価している．そこで，*Lagrange*の未定乗数$\boldsymbol{\lambda}$にこのRBSMの考え方を適用し，部分領域$\Omega^{(a)}$と$\Omega^{(b)}$における境界$\Gamma_{<ab>}$上の表面力を式(5)のように表す．

$$\boldsymbol{\lambda}_{<ab>}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\delta}_{<ab>} \tag{5}$$

キーワード：ハイブリット型ペナルティ法，異方性要素
〒184-8584　東京都小金井市梶野町3-7-2

ここで，$\boldsymbol{\delta}_{<ab>}$は部分領域境界面$\Gamma_{<ab>}$上の相対変位を表しており，$\boldsymbol{k}$はばね定数に対応する係数行列である．また，ハイブリッド型の仮想仕事式では，近似的に部分領域境界面上で変位の連続性を確保するため，極めて堅いばねを設ける必要がある．そこで本手法では，ばね定数をペナルティ関数と考え，以下のように仮定する．

$$k=p \tag{6}$$

３．異方性要素の取り扱い

直交異方性体として，**図3**に示すように，x'方向を含む紙面に垂直な面内では等方性であるが，x'方向とy'方向に関して異方性であるような，いわゆる面内等方性の材料に対しては等方性とは異なる弾性マトリックスが用いられる．弾性マトリックス$\boldsymbol{D'}$は $x'y'$座標に対するもの，すなわち，それぞれの要素における局所座標系に対するものであるが，全体座標系での弾性マトリックスに変換しておく必要がある．図に示すように，x,yを全体座標系にとると弾性マトリックス$\boldsymbol{D}$は式(7)のようになる．ここで，$\boldsymbol{T}$は座標変換マトリックスであり，$\boldsymbol{T}^t$はその転置マトリックスである．また，図中のβはxy座標に対する$x'y'$座標の傾きである．本論文では下記の弾性マトリックスを前述したハイブリッド型ペナルティ法の仮想仕事式である式(3)に適用させる．つまりHPMで異方性要素を取り扱う場合，ペナルティに関しては前述した式(6)をそのまま用い，剛性に関しては要素内の弾性マトリックスのみを変更することで容易に異方性要素の効果を表せるものと考えられる．

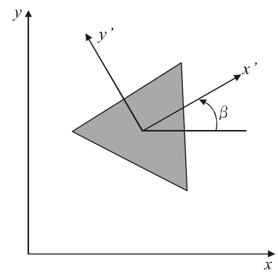

図3 異方性材料の要素

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{D'}\boldsymbol{T}^t \tag{7}$$

上式の弾性マトリックス$\boldsymbol{D'}$と座標変換マトリックス$\boldsymbol{T}$はそれぞれ式(9)のように表される．また，式中のE_1, E_2は主弾性係数を示し，G_1, G_2はその方向に関係したせん断弾性係数，さらにν_1, ν_2はポアソン比を表す．

$$\boldsymbol{D'} = \frac{E_2}{(1-n\nu_2^2)}\begin{bmatrix} n & n\nu_2 & 0 \\ n\nu_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & m(1-n\nu_2^2) \end{bmatrix} \begin{matrix} n = E_1/E_2 \\ m = G_1/G_2 \end{matrix} \quad , \quad \boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \cos^2\beta & \sin^2\beta & -2\sin\beta\cos\beta \\ \sin^2\beta & \cos^2\beta & 2\sin\beta\cos\beta \\ \sin\beta\cos\beta & -\sin\beta\cos\beta & \cos^2\beta - \sin^2\beta \end{bmatrix} \tag{8}$$

４．数値解析結果

本研究で用いたモデル図と要素分割図をそれぞれ**図4**，**図5**に示す．解析モデルは単位長さとする．境界条件としては，下部を水平方向，鉛直方向に拘束し，載荷方法は上部から変位を与えるものとする．また，表1は材料定数である．

結果として，**図6**に示すように，傾きが0度のケースでは載荷方向の変形のみを表したが，傾きが45度のケースでは載荷方向の変形に加え，水平方向の変形を伺うことができた．このことより，異方性の効果が得られていると考えられる．

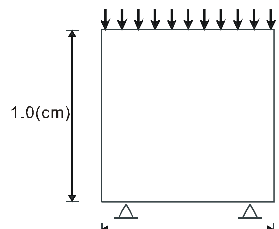

図4　解析モデル図

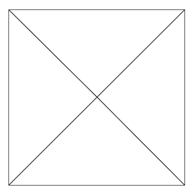

図5　要素分割図

表1　解析に用いた材料定数

	弾性係数1	弾性係数2
弾性係数(kgf/cm^2)	10000	1000
ポアソン比	0.1	

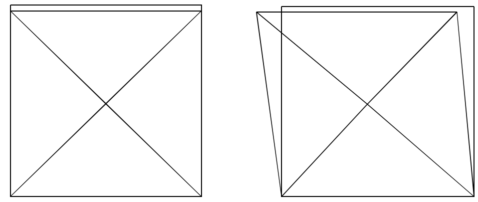

図6　変形図（0度,45度）

５．まとめ

本研究において，ハイブリッド型ペナルティ法に異方性要素を適用させ，傾きが0度と45度の2ケースに関して検討を行った．その結果，0度のケースでは載荷方向のみの変形を示し，45度傾いたケースでの変形図では異方性の効果を伺えることができた．つまり，ハイブリッド型ペナルティ法において，異方性要素を取り扱う場合，弾性マトリックスのみを変更することで異方性の効果が得られると考えられる．