弾性波散乱解析のための Lippmann–Schwinger 方程式

東京理科大学 理工学部 正会員 東平光生[1]

1 はじめに

弾性波が障害物に当たって生じる散乱波の解析については，すでに多くの著作が発表され，境界積分方程式が解析のための有効な手法であると認められている．著者もこれまで成層弾性波動場での散乱波動の解析に Green 関数のスペクトル表現と境界積分方程式を用いることを試みてきた [1)2)]．一方，散乱波動の解析には，境界積分方程式の流れを汲む手法ばかりでなく，Lippmann–Schwinger 方程式 [3)] を用いる方法もある．Lippmann–Schwinger 方程式は量子論などでの散乱理論に用いられており，ここでは，この方程式を弾性波動場に用いる場合の問題点および数値計算より得られる知見をまとめている．

2 弾性波動場のための Lippmann–Schwinger 方程式

簡単のために S 波が伝播する一次元波動場を考える．まず，波動場のせん断弾性係数 $\mu(x)$ が次のように空間変動を示すと仮定する．

$$\mu(x) = \mu_0 + \mu_1(x), \qquad (0 < \mu(x) < \infty,\ x \in R)$$

ここに，μ_0 は一定の値を示し，せん断弾性係数は μ_0 を中心に $\mu_1(x)$ でゆらぎを示すと考える．ただし，このゆらぎの範囲の条件は，式 (2) に示すように $\mu(x)$ が正の有界な実数となることである．理論展開上は $\mu_1(x)$ は微分可能な連続関数とし，その support は有界，すなわち，

$$\mathrm{supp}\ \mu_1(x) \subset B$$

とする．ただし，B は有界な集合で μ_1 の support の被覆を与える．せん断弾性係数が空間的に連続的に変化する場での S 波の伝播は次の方程式で記述される．

$$\mathrm{div}\ (\mu(x)\nabla u(x)) + \rho\omega^2 u(x) = 0 \tag{1}$$

ここに ρ は質量密度，$u(x)$ は変位場，ω は角振動数を示す．質量密度は空間的に変動しても定式化に困難は与えないが，ここでは見通しの良い定式化のため質量密度は一定とする．式 (1) の両辺を $\mu(x)(\neq 0)$ で除して次式を得る．

$$\nabla^2 u(x) + k^2 u(x) = -k^2 m(x)u(x) + \frac{1}{\mu_0}\nabla\mu_1(x)\cdot\nabla u(x) \tag{2}$$

ただし，

$$k = \frac{\omega}{\sqrt{\mu_0/\rho}}$$

$$m(x) = \frac{\mu_1(x)/\mu_0}{1+\mu_1(x)/\mu_0} \tag{3}$$

であり，ここから $m(x)$ の support は

$$\mathrm{supp}\ m(x) \subset B$$

となることが分かる．媒質が揺らぐ領域に平面波が入射した場合，波動場は次の積分方程式で記述されることになる．

$$u(x) = u^i(x) + \int_B k^2 g(x,y)m(y)u(y)dy - \int_B g(x,y)\frac{1}{\mu_0}\nabla\mu_1(y)\cdot\nabla u(y)dy, \qquad (x,y \in R) \tag{4}$$

ただし，u^i は平面波，$g(x,y)$ は Green 関数で次式で定義される．

$$(\nabla^2 + k^2)g(x,y) = -\delta(x-y)$$

一次元波動場では Green 関数は次式で与えられる．

$$g(x,y) = -\frac{i}{2k}\exp(-ik|x-y|)$$

式 (4) は弾性波動場のための Lippmann–Schwinger 方程式と呼ぶべきものである．ただし，量子論などでは式 (4) の右辺第 3 項に相当する項は現れない．式 (4) は不均質領域の被覆 B を離散化することで解くことができ，この意味で数値解析手法には特別の困難はない．

[1] 〒 278-8510 野田市山崎 2641, phone 04-7124-1501, fax 04-7123-9766
キーワード: 弾性波散乱, Lippmann-Schwinger 方程式, 成層構造

3 数値計算例

数値解析モデルを Fig. 1 に示す．ここでは無限領域の波動場に厚さ 1m の低速度層が埋め込まれたモデルを扱う．低速度層のせん断弾性係数の変動は Fig. 2 に示す．ここでは，せん断弾性係数の空間変動は連続関数となる必要から Fig. 2 にようにせん断弾性係数の変動に勾配区間を設けている．まず，Lippmann–Schwinger 方程式の解の妥当性を検討するために，伝達マトリックス法との比較を行った結果を Fig. 3 に示す．これによると，両者の結果は極めて良く一致しており Lippmann–Schwinger 方程式の弾性波動場への適用可能性が検証されたものと言える．次に，式 (4) の右辺第 3 項の解に与える影響について検討する．この項はせん断弾性係数の空間変動の勾配に関連するものであり，前述のように，量子論などで扱われる方程式では現れないものである．Fig. 4 に式 (4) の右辺第 3 項を無視した場合とそうでない場合の解の比較を示す．これによると，右辺第 3 項を無視した場合には，低速度層とその後方で応答が小さくでている．また，低速度層の前方では両者の解は極めて良く一致している．右辺第 3 項の無視によって，応答にかなりの差がでる領域が生じることになる．言い換えれば，波動場の剛性の空間変動の勾配が応答に無視できない影響を与える．

4 結論

本論文では弾性波散乱解析のための Lippmann–Schwinger 方程式を誘導し，その数値解析例を示した．Lippmann–Scwhinger 方程式は波動場の剛性が連続的に変化する場合に定式化が可能であり，数値解析の結果，波動場の剛性の空間変動の勾配が応答に無視できない影響を与えることが分かった．ここで示した定式化および数値解析は一次元波動場であるが，高次元の解析への拡張では，離散化は不均質領域を被覆した領域について行えば良いから，離散化プロセスそのものには困難はないと考えられる．一方で，高次元の解析では領域積分の離散化に伴う多くの計算機容量が要求されることになり，この問題の克服が Lippmann–Schwinger 方程式を弾性波動場に用いる際の課題と言える．

参考文献

1) Touhei, T. (2000): A scattering problem by means of the spectral representation of Green's function for acoustic layered half space, *Computational Mechanics*, **25**, pp. 477-488.

2) Touhei, T. (2003). Analysis of scattering waves in an elastic layered medium by means of the complete eigenfunction expansion form of the Green's function, *Int. J. Solids and Struct*, (in press)

3) Colton,D. and Kress, R. (1998). *Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory*, Berlin, Springer.

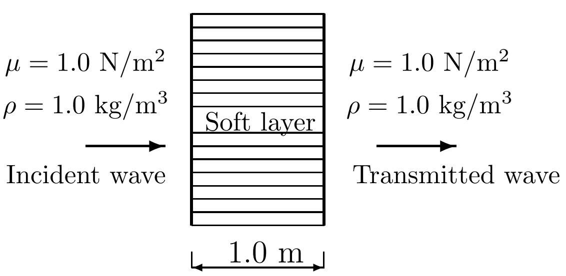

Figure 1: Analyzed model.

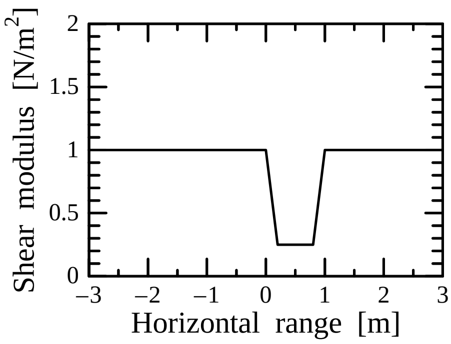

Figure 2: Spatial variation of the shear modulus.

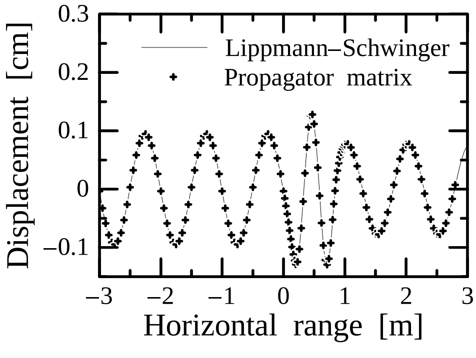

Figure 3: Comparison of displacement.

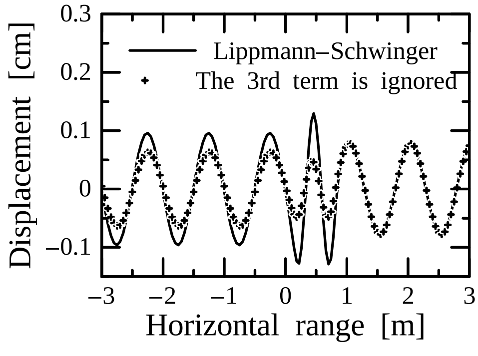

Figure 4: Effects of the gradient of the properties of the matrerial.