3 次元 Helmholtz 方程式における diagonal form の精度に関する研究

京都大学大学院工学研究科 学生会員 ○山根裕也
京都大学学術情報メディアセンター 正会員 西村直志

1. はじめに 波動解析に有効な境界積分方程式を解く際の計算量を軽減する手法の一つとして多重極法が提案されている．また，多重極法自体の計算量を軽減する手法として，diagonal form を用いる方法がある．しかし，diagonal form では低周波問題で桁落ちが発生し，十分な精度が得られないといった欠点がある．打ち切り項数と基本解の精度については Song と Chew[(3)] が検討しているが，その結果は必ずしも満足できるものではない．そこで本研究では，新たに波数とセル間の距離に着目し，diagonal form による，打ち切り項数と基本解の精度に関する評価式を数値的に検討した．

2. 研究に用いる理論，基礎式

2.1. 多重極法[(1)] 高速多重極法の考え方は，場をポテンシャルの重ね合わせとして表現する時，遠方からの寄与は個別に計算せず，多重極展開としてまとめて計算しようとするものである．また，方程式を解く際には反復法を用いて行列ベクトル積の計算をポテンシャルの和として表現することで，計算量を $O(N\log^n N)$ に抑えることができる．このように，多重極法を用いることで計算量の大幅な減少が期待され，有限要素法以上の性能が期待できるようになるといえる．

2.2. Diagonal form 多重極法の計算過程においていわゆる M2L を実行する際，行列を対角化することで計算量を抑えることができる．この形式を diagonal form という．[(2)] diagonal form においては，項数を大きくとると桁落ちが生じ，情報が失われる．そのため，満足のいく精度を得るのに望ましい項数を与える公式が重要となる．

2.3. 基本解の展開 基本解を展開して変形する事により，diagonal form の基礎式を得る事ができる．3 次元 Helmholtz 方程式の場合は次の様になる．

$$G(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = \frac{e^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \tag{1}$$

$$= \frac{ik}{4\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)j_n(k|\mathbf{y}|)h_n^{(1)}(k|\mathbf{x}|)P_n(\cos\Theta_{\mathbf{xy}}) \tag{2}$$

$$= \frac{ik}{4\pi}\int_{S_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4\pi}i^{-n}(2n+1)h_n^{(1)}(k|\mathbf{x}|)P_n(\cos\Theta_{\mathbf{x}\hat{\mathbf{k}}}) \cdot e^{ik\hat{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{y}}dS_{\hat{\mathbf{k}}} \tag{3}$$

2.4. Song,Chew の提案[(3)] Song,Chew が提案した精度の計算式は次の通りである．

$$d_0 = \left[\frac{p-kD}{1.8(kD)^{1/3}}\right]^{3/2} \tag{4}$$

p: 式 (3) の級数の打ち切り項数 d_0: 精度の桁数
kD: セルの直径 ($kD=\sqrt{3}ka$) ka: セル一辺の長さ

また，式 (3) が収束を始める項数，倍精度計算で式 (3) が発散し始める項数は，次のように提案されている．

- 収束を始める項数 $p=\sqrt{3}ka$
- diagonal form で (3) が発散し始める項数
  - 精度が 10^{-15} に達しているとき $p=(n+1)ka$
  - 精度が 10^{-15} に達していないとき $p=\sqrt{3}ka+13.16(ka)^{1/3}$

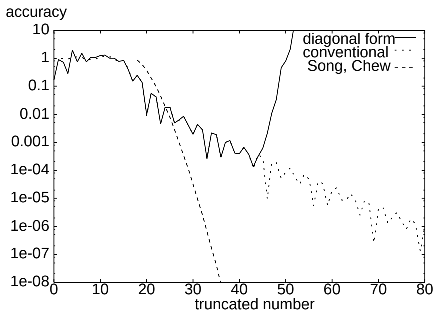

図 1: $n=1, ka=10$ の時の精度

3. 数値解析

3.1. 従来の公式と実際の精度の比較 プログラムを用いて，従来型多重極法での精度と，diagonal form を用いた時の精度を計算する．級数の打ち切り項数を p として，従来型多重極法での精度は式 (1) と式 (2) の相対誤差を，diagonal form を用いた時の精度は式 (1) と式 (3) の相対誤差をそれぞれ計算した．

従来の Song,Chew の精度の計算式と実際の精度をを比較し，従来の公式の正確さを確認する．その後，n と ka の値を変えて n, ka に対して精度がどのような挙動を示すかを観察する．$\mathbf{x},\mathbf{y}$ は解の誤差が最も大きくなるように選ぶ．

従来の公式 (4) と比較すると，n, ka が大きいときには従来の公式がほぼ適用できたのに対して，n,ka が小さいときには図 1 のように従来の公式はほとんど当てはまらなかった．

3.2. 直線近似による解析 式 (4) が適用できない場合について，図 1 の精度のグラフを直線で近似し，$n=$ const. とした時に ka による直線の傾きや切片の変化を観察する．

連絡先:〒 606-8501 京都市左京区吉田本町 TEL: 075-753-7457
FAX: 075-753-4794

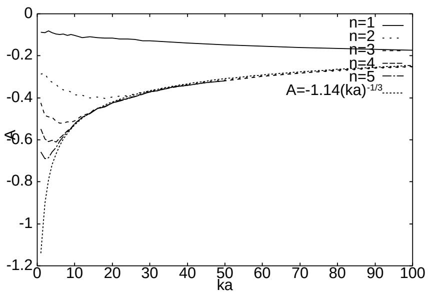

図 2: ka による傾きの変化

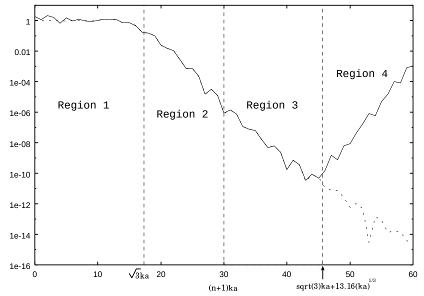

図 4: 4 Regions ($n = 2, ka = 10$ の時のグラフ)

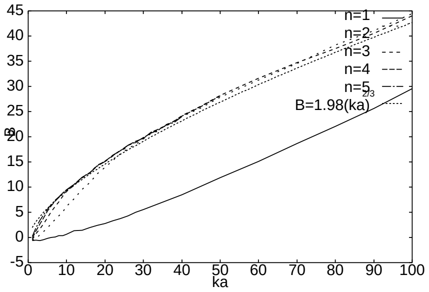

図 3: ka による切片の変化

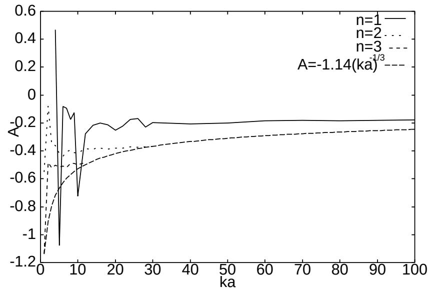

図 5: Region2 における ka による傾きの変化

結果を図 2, 図 3 に記す．これらを見ると，傾き，切片共にある曲線に漸近しており，n が大きいほど，より小さい ka である曲線に漸近していることが分かる．漸近曲線の式を求めると，次のようになった.（傾き：A, 切片：B とする.）

- 傾きのグラフの漸近曲線　　$A = -1.14(ka)^{-1/3}$
- 切片のグラフの漸近曲線　　$B = 1.98(ka)^{2/3}$

また，曲線に一致する時の ka の値は次のようになった．

$$ka = \left(\frac{13.16}{n-0.732}\right)^{3/2} \quad (5)$$

ka が，式 (5) で与えられる値よりも大きければ，解の精度の式は直線近似の式として次のように与えられる．

$$d_0 = -1.14(ka)^{-1/3}p + 1.98(ka)^{2/3} \quad (6)$$

(5) で与えられる値よりも小さい ka を扱う場合，図 2, 図 3 だけでは解析が困難であった．そこで，項数と精度のグラフを Song,Chew にならって図 4 のように４つの領域に分け，領域２について直線近似を行なうことにした．$n = \text{const.}$ として，ka による傾きや切片の変化を観察した．

結果を図 5 に記す．図 5 から，傾きの式が ka に対して独立である，また，傾きの ka に対する変化が連続であると仮定すると，傾きと切片の式は次のように与えられる．

$A = -0.314\sqrt{n-0.732}$　　$B = 0.544ka\sqrt{n-0.732}$

よって $ka \le \left(\frac{13.16}{n-0.732}\right)^{3/2}$ の時の近似曲線の式は次のようになる．

$$d_0 = (-0.314p + 0.544ka)\sqrt{n-0.732} \quad (7)$$

図 4 より，領域２，３で，精度がほぼ直線的であるので，(7) は領域３でも適用可能と考えられる．

こうして求められた精度計算の直線近似式は次のようになる．

- $ka \le \left(\frac{13.16}{n-0.732}\right)^{3/2}$ の時

$$d_0 = -0.314\sqrt{n-0.732}p + 0.544ak\sqrt{n-0.732} \quad (8)$$

- $ka > \left(\frac{13.16}{n-0.732}\right)^{3/2}$ の時

$$d_0 = -1.14(ka)^{-1/3}p + 1.98(ka)^{2/3} \quad (9)$$

これらが実際に精度の計算式として使えるのかを確認したところ，領域３でややずれが見られるが，さほど問題にはならない程度のずれといえるので十分実用可能な式であるといえる．また，$ka > \left(\frac{13.16}{n-0.732}\right)^{3/2}$ の範囲においては Song,Chew の公式を正しく用いることができることも確認できた．

参考文献

(1) 小林昭一（編）:波動解析と境界要素法, 京都大学学術出版会,2000. (2) N. Nishimura: Applied Mechanics Review,Vol.55 ,pp. 299–324,2002. (3) J Song, C-C Lu and WC Chew(1997), Multilevel fast multipole algorithm for electromagnetic scattering by large complex objects, IEEE Trans. Antennas Propag, 45, 1488-1493