# 不整合なメッシュのための dual-Schur mortar 法に関する基礎的検討

東北大学大学院　学生員　○ 生出 佳
東北大学　正会員　寺田 賢二郎
東北大学　正会員　市村 強

## 1. はじめに

有限要素法は様々な構造体の動的応答を得るための手法の一つとして広く普及している．しかし，構造体の領域ごとにメッシュ分割を行い，これらを統合して構造体の動的応答を得ようとする際，そのままでは領域の界面において要素が整合しないためリメッシュを行う必要がある．構造体の随所に不整合な界面が存在する場合や，設計，試作段階で構造体の形状，配置を随時変えるような場合，リメッシュの作業は大変な手間となる．

界面で要素が整合しない領域同士をリメッシュすることなく有限要素法により動的応答を得る方法として，mortar 法が知られている．Herry ら[1]は，mortar 法を用いて界面における運動力学的連続性を保持した応答を得るために，dual Schur 法を導入した．しかし，領域界面で向かい合う要素寸法がどんなに異なっても運動力学的連続性が保存されるのかについては検討されていない．

そこで，本研究では dual Schur 法を導入した mortar 法を用いて界面が必ずしも整合しない解析モデルの動的応答を得る際に，界面で向かい合う要素の寸法が異なると解の精度にどのような影響を及ぼすかについて検討を行う．

## 2. dual Schur 法を導入した mortar 法

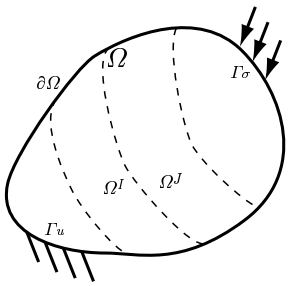
本研究の検討に用いる手法は，Herry ら[1]による dual Schur 法を導入した mortar 法である．ここではその定式化を概説する．

**図–1** に示すような領域 $\Omega$ を持つ物体を考える．領域全体の境界を $\partial\Omega$ により表せば，変位が与えられる境界 $\Gamma_u \subset \partial\Omega$ と荷重が与えられる境界 $\Gamma_\sigma \subset \partial\Omega$ に分解される（$\partial\Omega = \overline{\Gamma_u \cup \Gamma_\sigma}$）．dual Schur 公式により領域 $\Omega$ を**図–1** に示すように $s$ 個の領域 $\Omega^k$（$k = 1, \cdots, s$）に分割する．このとき，Lagrange 未定乗数 $\boldsymbol{\Lambda}$ を用いた Hamilton の原理により次のハイブリット型の変分形式が得られる．

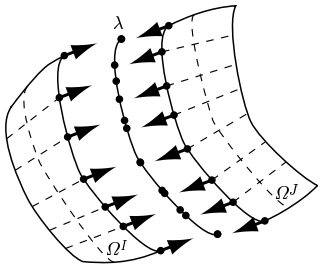
$$\int_T \left\{ -\int_\Omega (\boldsymbol{\partial}\delta\boldsymbol{u})^{\mathrm{T}} \boldsymbol{C} \boldsymbol{\partial}\boldsymbol{u} d\Omega + \int_\Omega (\delta\dot{\boldsymbol{u}})^{\mathrm{T}} \rho \dot{\boldsymbol{u}} d\Omega + \int_{\Gamma_\sigma} (\delta\boldsymbol{u})^{\mathrm{T}} \boldsymbol{t} d\Gamma + \int_{\mathcal{S}} (\delta\dot{\boldsymbol{u}}^I - \delta\dot{\boldsymbol{u}}^J)^{\mathrm{T}} \int_T \boldsymbol{\Lambda} d\tau d\mathcal{S} \right\} dt = 0 \tag{1}$$

ここに，$\dot{\boldsymbol{u}}$，$\boldsymbol{u}$ は速度，変位ベクトル，$\delta\dot{\boldsymbol{u}}$，$\delta\boldsymbol{u}$ は仮想速度，仮想変位ベクトル，$\boldsymbol{\partial}$ は微分演算子である．$\boldsymbol{C}$ は弾性係数行列，$\rho$ は単位体積質量，$\boldsymbol{t}$ は $\Gamma_\sigma$ において与えられる応力ベクトルである．また，$\delta\dot{\boldsymbol{u}}^I$，$\delta\dot{\boldsymbol{u}}^J$ はそれぞれ界面において対になる領域 $\Omega^I$，$\Omega^J$ の上の界面における仮想速度ベクトルである．式（1）から，次のような運動方程式

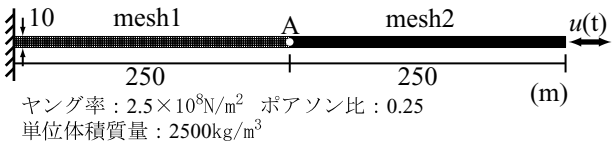
$$\boldsymbol{M}^k \ddot{\boldsymbol{d}}^k + \boldsymbol{f}^k_{\mathrm{int}} = \boldsymbol{f}^k_{\mathrm{ext}} - (\boldsymbol{P}^k)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\lambda} \quad \forall k \in (1, \cdots, s) \tag{2}$$




**図–1** 領域分割




**図–2** Lagrange 未定乗数




ヤング率：$2.5\times10^8$N/m$^2$　ポアソン比：0.25
単位体積質量：2500kg/m$^3$

**図–3** 解析モデル

と速度の連続性に関する次式が成立する．

$$\boldsymbol{P}\dot{\boldsymbol{d}} = \sum_{k=1}^{s} \boldsymbol{P}^k \dot{\boldsymbol{d}}^k = \boldsymbol{0} \tag{3}$$

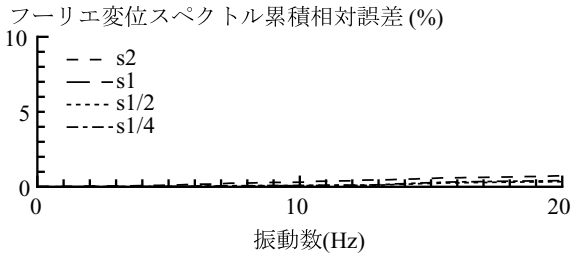
ここに，$\boldsymbol{M}^k$ は領域 $k$ の質量マトリックス，$\boldsymbol{f}^k_{\mathrm{int}}$ は領域 $k$ の節点内力ベクトル，$\boldsymbol{f}^k_{\mathrm{ext}}$ は領域 $k$ の節点外力ベクトル，$\ddot{\boldsymbol{d}}^k$，$\dot{\boldsymbol{d}}^k$ は領域 $k$ の節点加速度，節点速度ベクトル，$\boldsymbol{P}$ は向かい合う領域間の拘束マトリックス，$(\boldsymbol{P}^k)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}$ は領域間の結合力を表す．また，Lagrange 未定乗数 $\boldsymbol{\lambda}$ は力の次元を持ち，**図–2** に示すように領域間の表面力を表す．その評価点 $N^\lambda$ は，**図–2** の向かい合う領域 $\Omega^I$，$\Omega^J$ の界面上の節点をそれぞれ $N^I$，$N^J$ としたとき，$N^\lambda = (N^I \cup N^J) - (N^I \cap N^J)$ で表される．

## 3. 要素寸法が解の精度に及ぼす影響

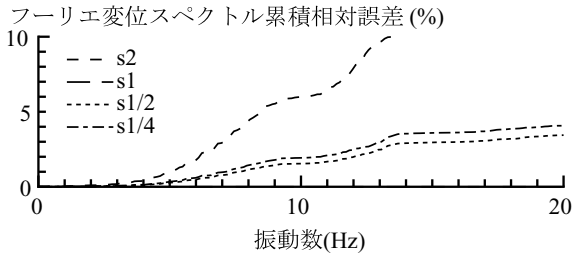
ここでは，前節で示した dual Schur 法を導入した mortar 法を用いて動的応答を得る際に，領域界面の向かい合う要素の寸法が異なると解の精度にどのような影響を及ぼすのかについて簡単な例題を用いて検討を行う．

**図–3** に示すような左端が固定された片持ち梁が右端に強制変位 $u(t)$ を受ける問題を考える．中央から左側の領域（mesh1）を要素寸法 1 の定型 4 節点アイソパラメトリック四辺形要素 (QUAD4) に分割し，右側の領域（mesh2）を要素寸法が mesh1 の 2 倍，1 倍，1/2 倍，1/4 倍の 4 種類の定型 QUAD4 で分割する．領域界面の向かい合う要素寸法が異なるこれらの解析モデルをそれぞれ s2，s1，s1/2，s1/4 と呼ぶことにする．また，比較のために，要素寸法が 1 の定型 QUAD4 により分割した通常の有限要素法のための解析モデルも用意し，これを r1 と呼ぶことにする．一般に，実体波において 1 波長を表すのに 10 要素程度が必要であると言われていることから，この r1 は 20Hz 程度

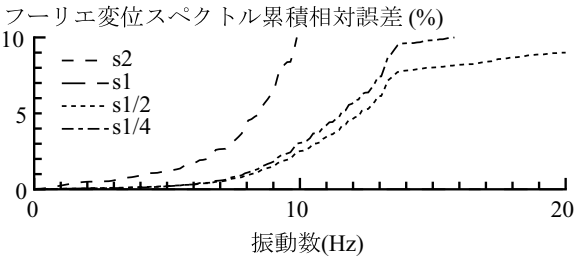
**Key Words:** *mortar* 法，*dual Schur* 法，動的有限要素解析
〒 980-8579 仙台市青葉区新巻字青葉 06　東北大学大学院工学研究科土木工学専攻 Tel.022-217-7420 Fax.022-217-7418



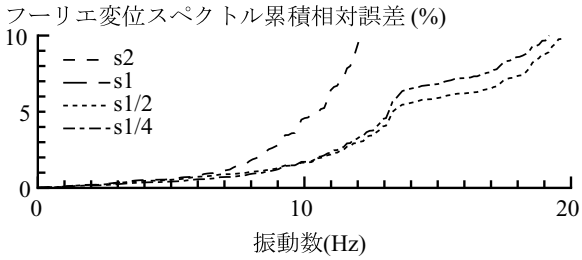

**図–4** 入力波 1Hz のときの応答




**図–5** 入力波 5Hz のときの応答




**図–6** 入力波 10Hz のときの応答




**図–7** 入力波 20Hz のときの応答

の実体波を表すことができるモデルである．強制変位として振幅 0.01(m) で 1Hz，5Hz，10Hz，20Hz の 4 種類の振動数の正弦波 1 波を与えたときの**図–3** の白丸で表される点 A の応答を求め，r1 の応答と比較し，要素寸法が解の精度に及ぼす影響について検討する．

**図–4〜7** に各入力波を与えたときの点 A における変位の時刻歴応答から求めたフーリエ変位スペクトル累積相対誤差を示す．横軸は，振動数 (Hz) である．縦軸のフーリエ変位スペクトルの累積相対誤差は，s2 から s1/4 のそれぞれのフーリエ変位スペクトルを振動数 $f$ の関数 $\tilde{g}(f)$ で表し，r1 のフーリエ変位スペクトルを $g(f)$ で表したとき $\{\int_0^f |\tilde{g}(f) - g(f)|\, df\}/\{\int_0^{fmax} |g(f)|\, df\} \times 100(\%)$ で表される．ただし，$fmax = 100$Hz とした．鎖線が s2 の応答，長い鎖線が s1 の応答，点線が s1/2 の応答，一点鎖線が s1/4 の応答である．

界面の要素寸法が同じ s1 を用いたときは，どの入力波を与えたときの応答を見ても累積相対誤差は 0 であり，r1 の応答に一致する．Lagrange 未定乗数により求められる領域間の表面力は，それぞれの領域の界面上の節点と同じ点において評価されるので，向かい合う領域の節点が 1 対 1 に対応する場合，その評価点もそれぞれの領域の節点に 1 対 1 に対応する．このため，向かい合う領域の節点間で表面力の補間誤差が生じないので，Lagrange 未定乗数が適切に評価されていれば，通常の有限要素法を用いた場合と全く同じ応答が得られる．

一方，界面の要素寸法が異なる s2，s1/2，s1/4 を用いたときは，界面における表面力の補間誤差とそれぞれの領域で表現できる周波数成分が異なるために，累積相対誤差は低周波成分で数%，高周波成分では 10%近くまで増加する傾向にある．特に，**図–5〜7** を見るとわかるように，mesh2 の要素寸法が mesh1 に比べて大きい s2 のとき誤差が生じやすい．これは，要素寸法が大きいと波の高周波成分を表すことが困難になるため，s2 では mesh1 で捉えた高周波成分を含む波を mesh2 で適切に表現できないのに対し，s1/2，s1/4 では mesh1 で捉える周波数成分は mesh2 でも適切に表現できることが原因だと考えられる．また，s1/2 と s1/4 の累積相対誤差はほぼ同じような傾向を示している．これは，mesh2 で表現できる高周波成分の波が mesh1 で捉えきれなかったためで，mesh1 の性能が応答に大きく影響していると考えられる．細かく見ると，s1/2 に比べて s1/4 の方が累積相対誤差が溜まりやすく，領域界面上の要素寸法比が大きくなるほど累積相対誤差が多少増加している．ただし，ここでは入力波を mesh2 側から与えているので，解析対象に与える入力エネルギーがメッシュサイズによって多少異なっているため，今後，メッシュサイズが不変な mesh1 側から入力波を与え入力エネルギーを統一して検討を行う必要がある．

また，累積相対誤差の増加傾向は入力波の振動数によっても異なっている．入力波の振動数が小さいと，構造体を通過する波の主成分が要素の表現できる周波数帯に十分含まれているため累積相対誤差は小さい．入力波の振動数が大きくなると，構造体を通過する波の主成分が要素の表現できる周波数帯を上回り，高周波成分の応答に誤差が生じるだけではなく，低周波成分の応答もそれに励起されて誤差を生じてしまうと考えられる．

## 4. まとめ

本研究では，dual Schur 法を導入した mortar 法を用いて，界面で要素が必ずしも整合しない解析モデルの動的応答が，界面の要素寸法が異なることによりどのような影響を受けるかについて検討を行った．界面の要素寸法が異なると，界面における表面力の補間誤差などにより応答波の高周波成分では比較的大きな累積相対誤差が発生するが，低周波成分ではそれほど大きな誤差は生じない．今回は，比較の対象として 20Hz 程度の実体波を表現することができる有限要素モデルを用いたが，誤差の原因を明らかにするために，今後，高周波成分も表現することができるモデルを用いた検討を行う必要がある．

### 参考文献

1) B. Herry, L. Di Valentin and A. Combescure, An approach to the connection between subdomains with non-matching meshes for transient mechanical analysis, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, **55**, pp.973–1003, 2002.