

有限被覆法の近似性能に関する基礎検討

東北大学大学院 学生員 車谷麻緒
東北大学大学院 正員 寺田賢二郎

1. はじめに

Shi により提案されたマニフォールド法¹⁾の基本概念を継承する有限被覆法(Finite Cover Method, 以下 FCM)は, 近似関数を定義する数学領域と支配方程式を満足させる物理領域とが分離可能であるという特徴を有する. すなわち, FCM は有限要素法(以下 FEM) と異なり, メッシュ(要素)内に任意の物理領域を許すことから定形のメッシュのみで解析が可能である. しかし, この物理領域の一部を要素内に含む FCM 特有の近似について, どの程度の近似性能を保持しているかなど定量的な検討はこれまでに行われた例はない. そこで本研究では, この物理領域の一部を有する FCM の要素の近似性能について, FEM の解との比較を通じて基礎検討を行う.

2. FCM の概説と弱形式のつり合い式

2.1 FCM の概説と問題提起

FCM は, 解析対象の分割と全体系への連立代数方程式の構築という点では FEM と同様であるが, 「近似関数を定義する数学領域」と「支配方程式が満たされるべき物理領域」を分離して考えるという点で FEM とは一線を画する. 前者は「数学被覆」と呼ばれ物体領域を余すことなく覆い尽くすように重ね合わされ, 物体領域と数学被覆の重なり合う「物理被覆」において剛性方程式を導出する. この方法論に従い解析対象をメッシュ分割すると, 図-1のように物理境界上では, FEM とは異なり部分的に物理被覆を有する要素が生成される. 本研究ではこのような FCM 要素の近似性能に関する基礎検討を行う.

2.2 Hybrid 型変分原理と弱形式のつり合い式²⁾

図-1に示される物理問題の静的つり合い問題を考える. つり合い式, 適合条件式, 構成関係式はそれぞれ次式で与えられる.

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \sigma + \bar{f} &= 0 & \text{in } \Omega \\ \varepsilon &= \frac{1}{2} \{ \nabla u + (\nabla u)^T \} & \text{in } \Omega \\ \sigma &= c : \varepsilon & \text{in } \Omega\end{aligned}$$

ここで, u, σ, ε は, それぞれ変位, Cauchy 応力, 微小ひずみであり, $\bar{f}$ は物体力, c は弾性テンソルを示している. FCM では FEM とは異なり, 物理境界上に節点のような解析自由度が存在するとは限らないため, 幾何学的境界条件を付帯拘束条件として加えなければならない. この付帯条件は Lagrange 未定定数 λ を導入することで取り除くこ

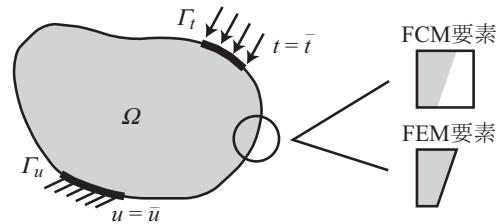


図-1 2次元物理問題と境界での要素形態

とができ, エネルギー汎関数

$$\begin{aligned}\Pi_{Hp}(u, \lambda) &= \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \sigma : \varepsilon - \bar{f} \cdot u \right) d\Omega \\ &\quad - \int_{\Gamma_t} \bar{t} \cdot u d\Gamma - \int_{\Gamma_u} \lambda \cdot (u - \bar{u}) d\Gamma\end{aligned}\quad (1)$$

の停留解は次式に示す弱形式のつり合い方程式を与える.

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \nabla \delta u : (c : \nabla u) d\Omega - \int_{\Gamma_u} \delta u \cdot \lambda d\Gamma \\ = \int_{\Omega} \delta u \cdot \bar{f} d\Omega + \int_{\Gamma} \delta u \cdot \bar{t} d\Gamma\end{aligned}\quad (2)$$

$$\int_{\Gamma_u} \delta \lambda \cdot (u - \bar{u}) d\Gamma = 0\quad (3)$$

本研究では, この弱形式(2), (3)を離散化して解く際, 変位 u と Lagrange 未定定数 λ の両者を独立変数として扱う Augmented Lagrangian 法を適用する. なお, 変位, Lagrange 未定定数ともに FEM の双一次の形状関数を用いて補間を行っている.

3. FCM の近似性能に関する基礎検討

3.1 検討 A: 剛性行列の固有値

一般に FEM では, 剛性行列の固有値は, 対応する正規化された固有ベクトルによる変形モードを生じるときに内部に蓄えられるひずみエネルギーの2倍に等しい. しかし, FCM では一般に物理形状が同じであってもこれを覆う数学被覆の大きさや位置により剛性行列や剛性行列の固有値, 固有ベクトルがそれぞれ異なる. そこで, 本検討では, まず FEM の剛性行列の固有値解析を行い, 各固有ベクトルを FCM の解析対象に対して強制変位として与えてそのときのひずみエネルギーの2倍の値を FEM の固有値と比較する.

解析モデルは図-2に示される通りであり, FEM では長さ 1 mm の正方形要素, FCM では FEM と同様の大きさの物理領域に対して, 数学被覆の大きさを $a = 2, 100$ と

キーワード: Finite Cover Method, Augmented Lagrangian 法, 固有値

〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 06, TEL 022-217-7417, FAX 022-217-7127 URL: <http://www.nde.civil.tohoku.ac.jp/>

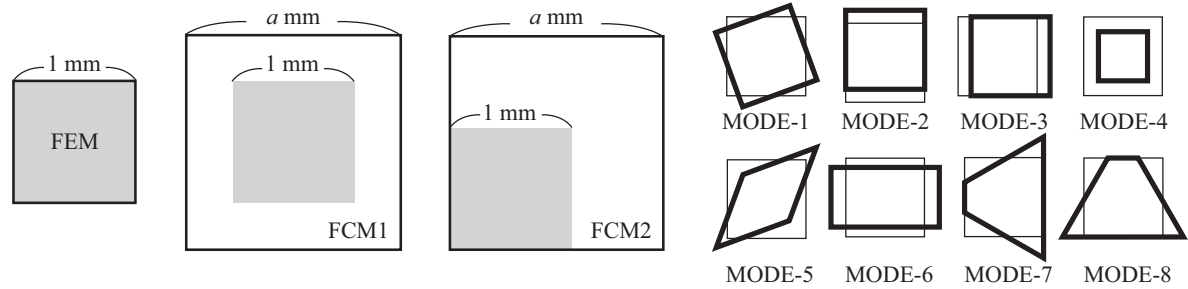


図-2 検討 A の解析モデル

表-1 検討 A の解析結果

	FEM	FCM1 ($a = 2$)	FCM1 ($a = 100$)	FCM2 ($a = 2$)	FCM2 ($a = 100$)
MODE-4	1.92308	1.92307	1.92307	1.92307	1.92307
MODE-5	0.769231	0.769231	0.769231	0.769231	0.769231
MODE-6	0.769231	0.769231	0.769231	0.769231	0.769231
MODE-7	0.576923	0.576924	0.576924	0.576924	0.576924
MODE-8	0.576923	0.576924	0.576924	0.576924	0.576924

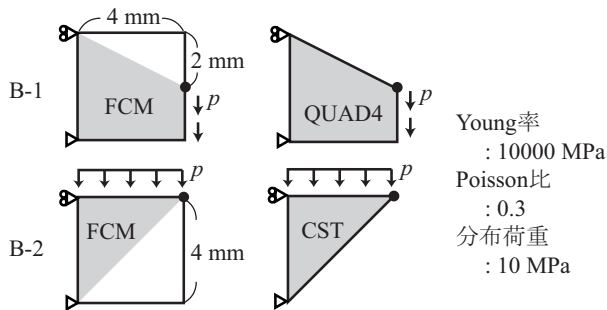


図-3 検討 B の解析モデル

表-2 検討 B の解析結果

B-1	FEM(QUAD4)	FCM
Disp-X	0.0019435	0.0016206
Disp-Y	-0.0106036	-0.0134509
Energy	0.108797	0.142639
B-2	FEM(CST)	FCM
Disp-X	0.0031200	0.0067374
Disp-Y	-0.0176800	-0.0212974
Energy	0.249600	0.321948

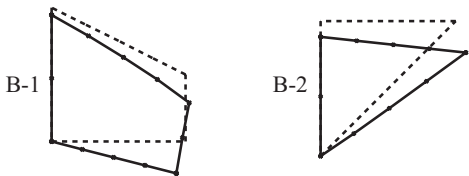


図-4 検討 B(FCM) の変形図 [×10]

する．また，両者ともに Young 率を 1 MPa，Poisson 比を 0.3 である．この検討ケースの解析結果を表-1に示す．表から分かるように，数学被覆と物理被覆が相似形を成す場合には，各々の大きさや位置に依らず FEM とほぼ同様の近似性能を保持している．

3.2 検討 B：荷重作用時の変位値

次に，図-3に示されるような FCM と FEM のモデルに対し，それぞれに分布荷重を与えることにより図中の●の変位と物体内に蓄えられるひずみエネルギーを比較する．ここで，前節とは異なり固有ベクトルではなく荷重を与える理由は，物理境界上のゆがんだ形状で近似関数が定義される FEM と物理境界とは独立に正方形領域で近似関数が定義される FCM では有する変形モードあるいは近似性能が異なると考えられるためである．この検討ケースの解析結果を表-2に示す．表から分かるように，FCM の解は FEM の解に対して同等あるいはそれ以上の近似性能を示している．また，物理境界上に多数点を取った場合の図-4に示される FCM の変形図を見ても妥当な解が得られ

ていることが分かる．

4. おわりに

本研究では，FCM 特有の部分的に物理領域を有する要素について，いくつか基礎検討を行った．本検討から得られた考察は FCM だけにとどまらず，Partition of Unity を踏襲する X-FEM などに対しても同様に適用される．

参考文献

1) Shi,G.H.: Manifold method of material analysis, *Transactions of the 9th Army Conference On Applied Mathematics and Computing*, Report No.92-1, U.S. Army Research Office, 1991.
2) 浅井光輝，寺田賢二郎，池田清宏，山岸道弘：Hybrid-FCM の開発とその多相材料の界面破壊解析への適用，*応用力学論文集* Vol.4, pp.85-94, 2001.