確率微分方程式によるサンプリングデータを使った曲面の Delaunay 三角形分割

福井大学大学院　学生会員　○　上田 哲也
福井大学工学部　正会員　福井 卓雄

1　はじめに

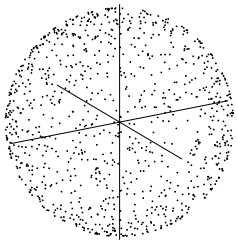
確率微分方程式による曲面のサンプリング法は極めて高速な曲面追跡手法である [1]。境界要素法では主として境界だけを離散化するので, 曲面上だけのサンプリング点を生成するこの手法は, 自由度の大きな境界要素データの自動生成のための手段として有望である。本研究では, 確率的サンプリング法の生成する曲面データを用いて曲面の Delaunay 三角形分割を行ない, 境界要素データとして利用することを試みる。

2　確率微分方程式による曲面のサンプリング

3 次元空間の曲面 S が陰関数表示 $F(\boldsymbol{x}) = 0$ により与えられているとする。田中ら [1] はこの曲面上にできるだけ均等に点をサンプリングする方法として, 各ステップにおけるサンプリング点の変位量 dx_i を確率過程と見て, 確率微分方程式

$$dx_i(t) = P_{ij}(\boldsymbol{x}(t))\, dw_j(t) - \frac{D}{|\nabla F|^2}\frac{\partial F(\boldsymbol{x}(t))}{\partial x_i}\frac{\partial^2 F(\boldsymbol{x}(t))}{\partial x_j \partial x_k} P_{kj}(\boldsymbol{x}(t))\, dt - KD\frac{\partial F(\boldsymbol{x}(t))}{\partial x_i(t)}\frac{F(\boldsymbol{x}(t))}{|\nabla F|^2}\, dt \tag{1}$$

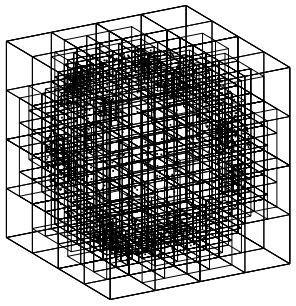
を解くことにより一連の点列を決定する方法を提案した。ここに, ∇F は F の勾配, dw_i は正規乱数ベクトル, D は分散定数, K は正の拘束パラメータである。P_{ij} は射影作用素で $P_{ij} = \delta_{ij} - (\partial F/\partial x_i)(\partial F/\partial x_j)/|\nabla F|^2$ で定義される。上式の右辺の第 1 項は接平面上の変位を表す項, 第 2 項は, 第 1 項に対する補正項で, 伊藤積分の意味の確率過程に変換するために現れる項, 第 3 項は垂直方向の修正項である。計算は, 初期値を適当に定め, 適当な空走期間を置いた後に, 得られる点を Newton 法により修正して曲面上に置きながら実行する。計算は極めて高速であり, 数十万点のサンプリングを数秒以内に実行することができる。



図–1　球面のサンプリング例

3　曲面の Delaunay 三角形分割

曲面上のサンプリング点を使って境界要素データを作成するために, Delaunay 三角形分割を試みる。閉じた曲面の分割を得るために, まず曲面を小部分に分割し, 各小部分について曲面の近似平面をとってその上で Delaunay 分割を行なう。つぎに, 小部分の三角形分割どうしをつなぎ合わせて全体の曲面の分割を得る, という方法を取る。具体的には, つぎの手順で計算を実行する。

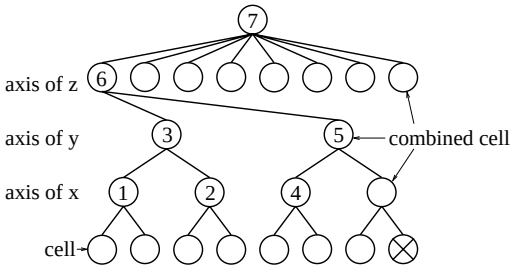


図–2　8 分木による構造化

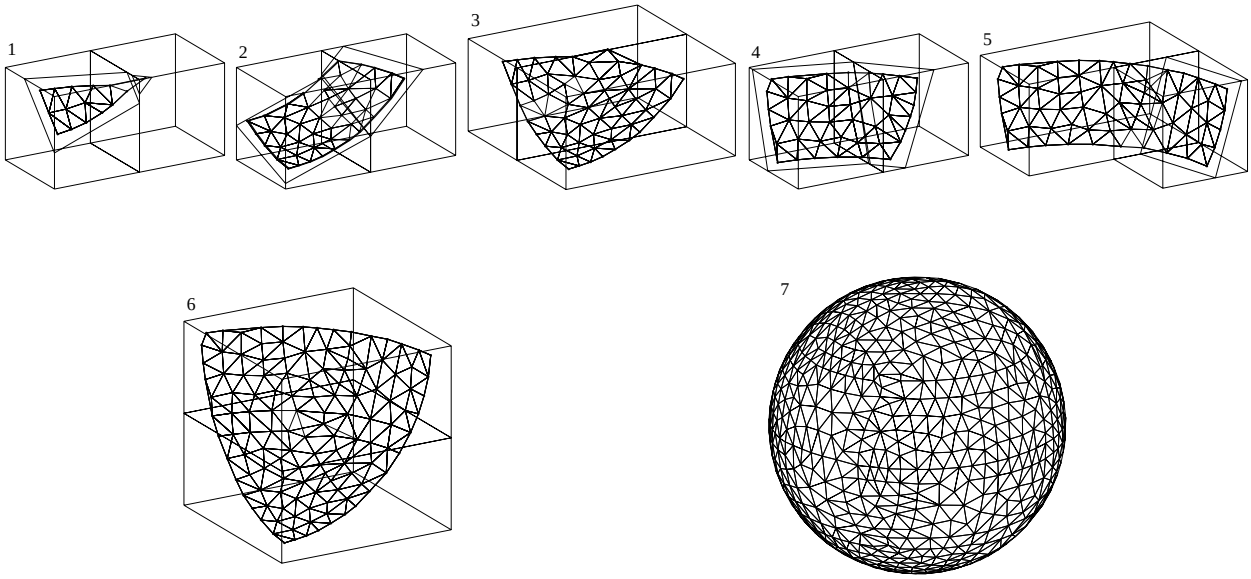
1. 曲面を小部分に分けるために, サンプリング点の集合を 8 分木により構造化する。
2. 葉のセルについてサンプリング点の平均位置と平均法線方向を求め近似平面を決定する。
3. サンプリング点の近似平面への射影を取り平面上の Delaunay 三角形分割を行なう。ここでは確率的逐次添加法のアルゴリズムを用いている。
4. 乱数によるサンプリングデータの不均一さを解消するために葉のセルにおいてバブルメッシュ法を使う。サンプル点が離れているときには引力を近いときには斥力が働くようする。

キーワード ： 境界要素法, 確率微分方程式, サンプリング, Delaunay 三角形分割, バブルメッシング
連絡先 ： 福井大学 〒 910-8507 福井市文京 3-9-1 TEL0776-27-8596 F AX0776-27-8746

5. 8 分木を上昇して親のセルに移り, 含まれる子セルの三角形分割どうしをつなぎ合わせる。このとき角度最適条件を満足するように, 必要に応じて新しく作成した三角形に隣接するメッシュの組みかえを行なう。



図–3 三角形のつなぎ合わせの手順



バブルメッシングはつぎの運動方程式

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2}+c\frac{dx(t)}{dt}=f(t) \quad (t>0) \qquad x=x(0),\quad \frac{dx}{dt}=0 \quad (t=0) \tag{2}$$

を Euler 法で解くことにより平衡位置を求める。ここで、m は質量、c は粘性抵抗、$f(t)$ はバブル間力である。バブル間力は、$f(w)=1.25w^3-2.375w^2+1.125$ で定める。ここで w は (バブル間距離) ／ (安定距離) を表す。

4 おわりに

確率微分方程式によるサンプリングデータを８分木によって構造化し、曲面の Delaunay 三角形分割、バブルメッシングを行い葉セルをつなぎ合わせることにより均質な境界要素を作ることができた。種々の曲面の三角形分割およびそれらの応用については当日報告する。

参考文献

[1] Tanaka, S, A. Morisaki, S. Nakata, Y. Fukuda, and H. Yamamoto : Sampling inplicit surfaces base on stochastic differential equations with converting constraint, *Computers & Graphics*, **24**, pp. 419–431, 2000.

[2] 福井卓雄：確率微分方程式による任意曲面データの生成とその境界積分方程式法への応用, 計算工学講演会論文集, **6**, 2002.