

プロジェクトの最適評価停止問題

京都大学大学院 学生会員 ○織田澤利寿
京都大学大学院 フェロー会員 小林 潔司

京都大学工学部 学生会員 松田 明広

1. はじめに

昨今、体系的な公共事業評価システムの構築が進められている。本研究では、リアルオプション理論を用い、プロジェクトの事前・再評価問題を評価費用を考慮した最適評価停止問題として定式化し、プロジェクトへの最適な投資タイミング、破棄・中止タイミングを内生的に決定できる事前・再評価ルールを求める方法論を提案する。さらに、提案する事前・再評価モデルの最適ルールが第2種フレドホルム型積分方程式の解として与えられることを示し、あわせてその解法を提案する。

2. モデルの定式化

(1) プロジェクト評価の構造

図-1は、本研究で想定するプロジェクト評価の構造を表す。事前評価プロセスの各評価時点において、1) プロジェクトの採択と2) 破棄という終了オプションと、留保という継続オプションが必ず含まれる。再評価プロセスにおいても採択・中止という終了オプションと留保という継続オプションが含まれる。事前・再評価プロセスにおいて、終了オプションが1度でも選択された時点で評価プロセスは終了し、継続オプションが選択される限り評価は継続される。本研究では、評価費用を明示的に考慮することにより、事前・再評価の最適見直し回数を内生的に決定できるモデルを提案する。

(2) モデル化の前提条件

本研究では、公共プロジェクトの評価問題を初期投資（費用 C_1 ）および追加的投資（費用 C_2 ）の2段階投資に関する意思決定問題として扱う。無限期間の計画視野のもとで、便益の不確実性や投資の不可逆性を考慮した動的最適化問題を定式化する。意思決定主体は初期時点より一定期間 τ 毎にプロジェクトの事前評価を行い、採択、破棄、留保のいずれかを選択する。第1段階投資終了後、一定の期間 τ 毎に再評価が実施され、第2段階投資に関して採択、中止、留保のいずれかが選択される。プロジェクト価値は、第2段階投資が実施された時点ではじめて発生するものとし、工期は考慮しない。プロジェクト価値は、仮にその時点にプロジェクトが完成した場合に当該時点から将来にわたって発生する期待総便益の当該期価値を意味する。プロジェクト価値にはリスクが存在し、時間軸に沿って変動する。任意の時点 t_i でプロジェクト価値 $\hat{B}_i$ が観測された場合、次期評価時点 t_{i+1} の観測値 B_{i+1} は条件付き確率密

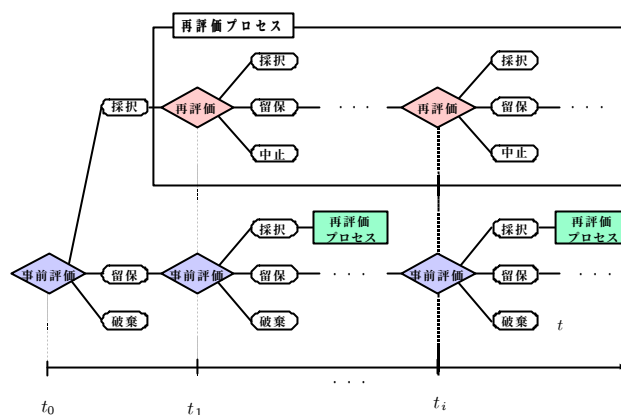


図-1 プロジェクト評価の構造

度関数 $f(B_{i+1}|\hat{B}_i)$ に従って分布する。さらに、事前・再評価にはそれぞれ費用 δ_1, δ_2 を要する。また、プロジェクトを中止する場合には中止費用 S が必要となり、破棄する場合は費用はかからないとする。簡単のため、 $C_1, C_2, \delta_1, \delta_2, S$ は全期間を通じて一定とする。

(3) 再評価問題

いま、時点 t_i の事前評価においてプロジェクトが採択され、時点 t_k においてプロジェクトの再評価が行われる問題に注目する。再評価問題は、再評価時点 t_k におけるプロジェクト価値の観測値 $\hat{B}_k$ のもとでプロジェクトの1) 採択、2) 中止、3) 留保のいずれかの決定を下す問題として定式化できる。プロジェクトを採択した場合に獲得できる期待純価値は $P(\hat{B}_k) = \hat{B}_k - C_2$ と表される。一方、中止した場合には中止費用 $-S$ を要する。いま、再評価時点 t_k においてプロジェクト価値 $\hat{B}_k$ が観測された場合、それ以降将来にわたって獲得できる期待純価値の最大値を最適値関数 $\Phi(\hat{B}_k)$ と表す。再評価時点 t_k においてプロジェクトを留保することにより、時点 t_{k+1} で獲得できる期待純価値の当該期価値 $G_{k+1}(\hat{B}_k)$ は、

$$G_{k+1}(\hat{B}_k) = E_f[\Phi(B_{k+1})|\hat{B}_k] = \left\{ \int_0^\infty \Phi(B_{k+1})f(B_{k+1}|\hat{B}_k)dB_{k+1} \right\} \quad (1)$$

と表される。ここで、 $E_f[\cdot|\hat{B}_k]$ は条件付き確率密度関数 $f(B_{k+1}|\hat{B}_k)$ に関する期待値操作を表す。従って、時点 t_k における再評価問題は、次のように定式化される。

$$\Phi(\hat{B}_k) = \max \left[P(\hat{B}_k), -S, \{G_{k+1}(\hat{B}_k) - \delta_2\} \exp(-\rho\tau) \right] \quad (2)$$

式(2)の右辺はそれぞれプロジェクトを採択、中止、留保により獲得される期待純価値の当該期価値を表す。

なお、留保した場合、次の再評価時点では再評価費用 δ_2 が必要となる。意思決定主体は、3つの戦略のうち期待純価値の当該期価値が最大となる選択肢を選択する。

いま、ある臨界的な $\bar{B}^*, \underline{B}^*$ ($\bar{B}^* > \underline{B}^*$) が存在し、意思決定が留保されるようなプロジェクト価値を示す継続集合 D を $D = \{B_k | \bar{B}^* \geq \hat{B}_k \geq \underline{B}^*\}$ と定義する。 $D \neq \emptyset$ を仮定すると、任意の $\hat{B}_k \in D$ に対して、

$$\Phi(\hat{B}_k) = \{G_{k+1}(\hat{B}_k) - \delta_2\} \exp(-\rho\tau) \quad (3)$$

が成立する。最適値関数 $\Phi(\hat{B}_k)$ の値はプロジェクト価値 $B = \hat{B}_k$ の値のみに依存しているため、下付添え字 k を省略すると、式(3)より、継続集合 D 内において

$$\begin{aligned} \Phi(\hat{B}) &= \Theta(\hat{B}) + \int_{\underline{B}^*}^{\bar{B}^*} \Phi(B) K(B, \hat{B}) dB \\ \Theta(\hat{B}) &= \left\{ \int_0^{\underline{B}^*} -S f(B|\hat{B}) dB + \int_{\bar{B}^*}^{\infty} P(B) f(B|\hat{B}) dB - \delta_2 \right\} \exp(-\rho\tau) \end{aligned} \quad (4)$$

が成立する。但し、 $K(B, \hat{B}) = f(B|\hat{B}) \exp(-\rho\tau)$ である。式(4)は未知関数 $\Phi(\hat{B})$ に関する第2種フレドホルム型積分方程式となっている。積分方程式の解を $\Phi^*(\hat{B})$ と表そう。最適値関数 $\Phi^*(\hat{B})$ に対して境界条件

$$\Phi^*(\bar{B}^*) = P(\bar{B}^*) \quad (5a)$$

$$\Phi^*(\underline{B}^*) = -S \quad (5b)$$

が成立する。再評価問題は積分方程式(4)と境界条件(5a),(5b)を満足するような未知関数 $\Phi^*(\hat{B})$ と臨界価値 $\bar{B}^*, \underline{B}^*$ を求める問題に帰着する。

(4) 事前評価問題

i 回目の事前評価の見直しを行う時点 $t_i = t_0 + i\tau$ に着目する。時点 t_i においてプロジェクトを採択し、第1段階の投資を実施した場合に獲得できるプロジェクトの期待純価値の当該期価値 $Q(\hat{B}_i)$ は

$$\begin{aligned} Q(\hat{B}_i) &= \{E[\Phi(B_{i+1})] - \delta_2\} \exp(-\rho\tau) \\ &= \{G_{i+1}(\hat{B}_i) - \delta_2\} \exp(-\rho\tau) - C_1 \end{aligned} \quad (6)$$

と表される。また、時点 t_i でプロジェクト価値 $\hat{B}_i$ が観測され、時点 t_i 以降最適なプロジェクト投資を実施したことによって得られる期待純価値の最大値を最適値関数 $\Psi(\hat{B}_i)$ で表すと、時点 t_i で意思決定を留保したことにより時点 t_{i+1} で獲得できる期待純価値 $H_{i+1}(\hat{B}_i)$ は

$$\begin{aligned} H_{i+1}(\hat{B}_i) &= E[\Psi(B_{i+1})|\hat{B}_i] \\ &= \int_0^{\infty} \Psi(B_{i+1}) f(B_{i+1}|\hat{B}_i) dB_i \end{aligned} \quad (7)$$

と表される。以上より、事前評価問題は

$$\Psi(\hat{B}_i) = \max \left[Q(\hat{B}_i), 0, \{H_{i+1}(\hat{B}_i) - \delta_1\} \exp(-\rho\tau) \right] \quad (8)$$

と再帰的に定式化される。式(8)の右辺はそれぞれプロジェクトを採択、破棄、留保により獲得される期待純価値の当該期価値を表す。ここで、ある臨界的な $\underline{B}^*, \bar{B}^*$ が存在し、継続集合 C を $C = \{\hat{B}_i | \bar{B}^* \geq \hat{B}_i \geq \underline{B}^*\}$ と定義すると、事前評価問題は

$$\Psi^*(\bar{B}^*) = Q(\bar{B}^*) \quad (9a)$$

$$\Psi^*(\underline{B}^*) = 0 \quad (9b)$$

を満足するような第2種フレドホルム積分方程式の解 $\Psi^*(\hat{B})$ と臨界価値 $\bar{B}^*, \underline{B}^*$ を求める問題へと帰着する。

3. 事前・再評価モデルの解法

提案した事前・再評価モデルでは、事前評価問題の境界条件に再評価プロセスの最適値関数が用いられるという入れ子構造をしている。そのため、モデルの解は1) 再評価問題の最適解を求め、2) それを用いて事前問題の最適解を求めるという2段階のステップを通して求められる。ここでは、再評価問題に着目して未知関数の解法を示す。再評価問題の式(4),(5a),(5b)において、 $\underline{B}^*, \bar{B}^*$ が既知であると仮定する。さらに、

$$\begin{aligned} K_1(B, \hat{B}) &= K(B, \hat{B}) \\ K_n(B, \hat{B}) &= \int_{\underline{B}^*}^{\bar{B}^*} K_{n-1}(\xi, \hat{B}) K(B, \xi) d\xi \\ \Gamma(B, \hat{B}) &= \sum_{n=1}^{\infty} K_n(B, \hat{B}) \end{aligned} \quad (10)$$

とすれば、積分方程式(4)の解は、

$$\Phi^*(\hat{B} : \underline{B}^*, \bar{B}^*) = \Theta(\hat{B}) + \int_{\underline{B}^*}^{\bar{B}^*} \Gamma(B, \hat{B}) \Theta(B) dB \quad (11)$$

と表される。ここに、積分区間 $\underline{B}^*, \bar{B}^*$ が変化すれば最適値関数 $\Phi^*(\hat{B} : \underline{B}^*, \bar{B}^*)$ の関数形が変化することに留意しよう。すなわち、最適値関数は $\underline{B}^*, \bar{B}^*$ をパラメータとする汎関数となっており、それを陽的な関数形として表現することは不可能である。したがって、再評価問題は

$$\begin{aligned} \Phi^*(\hat{B} : \underline{B}^*, \bar{B}^*) &= \Theta(\hat{B}) + \int_{\underline{B}^*}^{\bar{B}^*} \Gamma(B, \hat{B}) \Theta(B) dB \\ \Phi^*(\bar{B}^* : \underline{B}^*, \bar{B}^*) &= P(\bar{B}^*) \\ \Phi^*(\underline{B}^* : \underline{B}^*, \bar{B}^*) &= -S \end{aligned} \quad (12)$$

を満足する $\Phi^*(\hat{B})$ ならびに $\bar{B}^*, \underline{B}^*$ を求める問題に帰着する。再評価問題の解を用いることにより、事前評価問題についても同様の操作で求解できる。

4. おわりに

本研究では、プロジェクトの事前・再評価問題を評価費用を考慮した最適評価停止問題として定式化し、最適投資・中止タイミングを内生的に決定できるような事前・再評価モデルを提案した。なお、紙面の都合上、数値計算事例に関しては講演時に詳述したい。