

多段階プロジェクトの投資タイミング

東京工業大学 学生会員 久保元治

東京工業大学 正会員 上田孝行

1. はじめに

公共事業への批判が強い中、計画されていた事業が中止になったり休止になったりするケースがよく見られる。しかし、これらの判断は「遅れているから中止」、「需要が少ないから休止」などといった短絡的判断でなされている場合もあるように思われ、適切な進行計画が事前に検討されていたのかという疑問が生じる。

このような中、Ueda et al (2002)、上田他 (2001)は、一段階の投資事業には現在価値を最大にする最適投資タイミングが存在するため、そのタイミングより実施が早くても遅くてもプロジェクトの現在価値は下がってしまうことを主張している。本研究ではそれを拡張して多段階プロジェクトの投資タイミングを分析することを目的とする。また、数値例では分割投資と一括投資に着目し、分割投資の有効性について明らかにする。

2. 多段階投資モデル

プロジェクトが n 段階に分けて実行されるとすると、全体での現在価値は次のように表される。

$$V = -\sum_{i=1}^n I_i \exp(-\rho t_i) + \sum_{i=1}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \Phi_i(t) \exp(-\rho t) dt + \int_{t_n}^{\infty} \Phi_n(t) \exp(-\rho t) dt \quad (1)$$

ここで、 V はプロジェクトの現在価値、 I_i は i 段階の投資額、 $\Phi_i(t)$ は i 段階の純便益、 ρ は社会的割引率、 t_i は各段階の投資タイミングを表している。

n 段階プロジェクトでは $n!$ 通りの投資順序が存在する。そこで、最適投資順序を決定するために、全ての投資順序について最適投資時期を求め、それぞれの現在価値を比較する。そして、最も現在価値が大きくなる順序でのタイミングを最適投資タイミングと考える。

3. 二段階プロジェクトの投資タイミング

二段階投資モデルは、多段階投資モデルの $n=2$ の時であるので、現在価値は次のように表される。

$$V(t_1, t_2) = -I_1 \exp(-\rho t_1) + \int_{t_1}^{t_2} \Phi_1(t) \exp(-\rho t) dt - I_2 \exp(-\rho t_2) + \int_{t_2}^{\infty} \Phi_2(t) \exp(-\rho t) dt \quad (2)$$

よって、最適投資タイミングは次式を解くことで求めることができる。

$$t_1, t_2 = \arg \max_{t_1, t_2} V(t_1, t_2) \quad (3)$$

$$s.t. 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T$$

ここで、 T は最終実施期限の制約である。(3)式を非線形計画問題のクーン・タッカー条件（例えば、西村(1990)）に帰着して解くことで、以下のような8

つのパターンの最適投資タイミングがあることが分かる。

一段階目は今すぐ、二段階目はしばらく待つ

$$\begin{cases} \rho I_1 - \Phi_1(0) \leq 0 \\ \Phi_1(t_2^*) + \rho I_2 - \Phi_2(t_2^*) = 0 \\ t_1^* = 0, 0 < t_2^* < T \end{cases} \quad (4)$$

一段階目と二段階目はしばらく待って同時に

$$\begin{cases} \rho I_1 - \Phi_1(t_1^*) \geq 0 \\ \Phi_1(t_2^*) + \rho I_2 - \Phi_2(t_2^*) \leq 0 \\ \rho I_1 + \rho I_2 - \Phi_2(t_2^*) = 0 \\ 0 < t_1^* = t_2^* < T \end{cases} \quad (5)$$

一段階目はしばらく待つ、

二段階目は最終実施期日まで待つ

$$\begin{cases} \rho I_1 - \Phi_1(t_1^*) = 0 \\ \Phi_1(T) + \rho I_2 - \Phi_2(T) \geq 0 \\ 0 < t_1^* < T, t_2^* = T \end{cases} \quad (6)$$

一段階目と二段階目は最終実施期日まで待って同時に

$$\begin{cases} \rho I_1 - \Phi_1(T) \geq 0 \\ \rho I_1 + \rho I_2 - \Phi_2(T) \geq 0 \\ t_1^* = t_2^* = T \end{cases} \quad (7)$$

一段階目は今すぐ、

二段階目は最終実施期日まで待つ

$$\begin{cases} \rho I_1 - \Phi_1(0) \leq 0 \\ \Phi_1(T) + \rho I_2 - \Phi_2(T) \geq 0 \\ t_1^* = 0, t_2^* = T \end{cases} \quad (8)$$

一段階目と二段階目は今すぐ同時に

$$\begin{cases} \Phi_1(0) + \rho I_2 - \Phi_2(0) \leq 0 \\ \rho I_1 + \rho I_2 - \Phi_2(0) \leq 0 \\ t_1^* = t_2^* = 0 \end{cases} \quad (9)$$

一段階目はしばらく待つ、

二段階目はさらにしばらく待つ

$$\begin{cases} \rho I_1 - \Phi_1(t_1^*) = 0 \\ \Phi_1(t_2^*) + \rho I_2 - \Phi_2(t_2^*) = 0 \\ 0 < t_1^* < t_2^* < T \end{cases} \quad (10)$$

建設期限が今すぐ

$$0 = t_1^* = t_2^* = T$$

キーワード：多段階投資，最適投資タイミング，分割投資，一括投資

〒152-8550 東京都目黒区大岡山 2-12-1

4. 数値例

各段階のプロジェクトの純便益は一定の変化率の元で変化していくと考えると、次のように表される。

$$\Phi_1(t) = (\bar{b}_1 - \bar{c}_1) \exp \omega_1 t \quad (11)$$

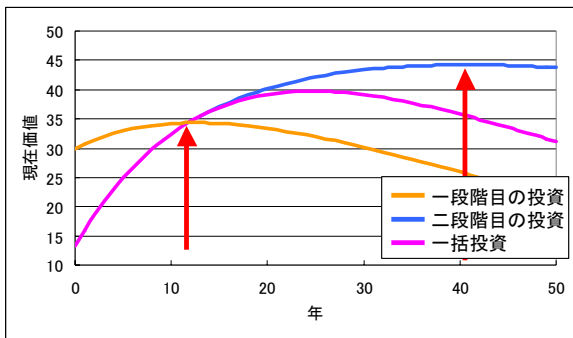
$$\Phi_2(t) = (\bar{b}_2 - \bar{c}_2) \exp \omega_2 t \quad (12)$$

ここで、 $(\bar{b}_i - \bar{c}_i)$ は i 段階の年当たり純便益の初期値、 ω_i は i 段階の年当たり純便益の変化率である。

4.1 ケース1： $\omega_1 > 0, \omega_2 > 0$

このケースは、例えば人口や経済が成長している地域にあてはまる。図1は投資タイミングと現在価値の推移を表している。図1より一段階目は12.5年後、二段階目は40.5年後が最適投資タイミングであることが分かる。これは「一段階目はしばらく待つ、二段階目はさらにしばらく待つ」にあてはまる。

また、このプロジェクトを一括投資で行う場合、現在価値は39.7億円となる。これは、分割投資を行う場合の現在価値44.2億円よりも小さく、分割投資が有益であることが分かる。

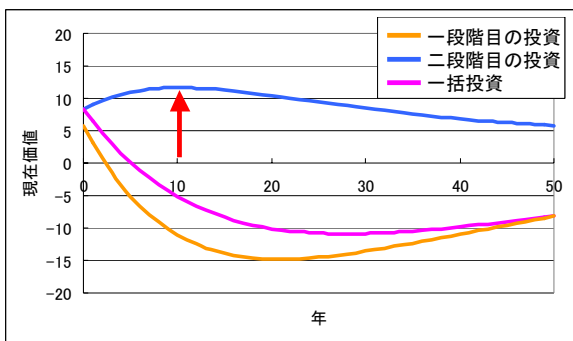


	一段階目	二段階目
投資額	170億円	150億円
年当たり純便益の初期値	6億円	10億円
年当たり純便益の変化率	1%	1%

図1：発展地域の場合

4.2 ケース2： $\omega_1 < 0, \omega_2 < 0$

このケースは、例えば少子化などで人口が減少している地域にあてはまる。図2より一段階目は今すぐ、二段階目は10.2年後が最適投資タイミングであることが分かる。これは「一段階目は今すぐ、二段階目はしばらく待つ」にあてはまる。



	一段階目	二段階目
投資額	80億円	120億円
年当たり純便益の初期値	6億円	10億円
年当たり純便益の変化率	-3%	-0.8%

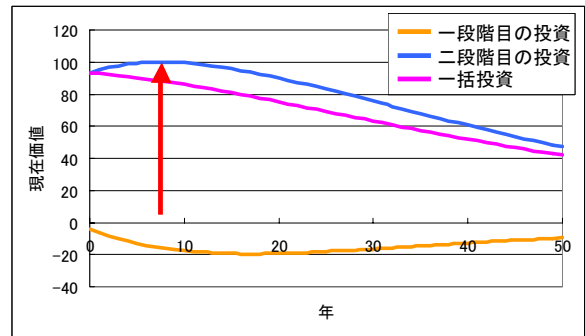
図2：衰退地域の場合

ここで一括投資を行う場合5.1年後までに投資を行わないと現在価値が負になってしまうのに対し、分割投資を行う場合は最適投資期日がなくなることが分かる。これは段階投資には「実施期限の引き延ばし効果」がある場合があることを表している。

4.3 ケース3： $\omega_1 < 0, \omega_2 > 0$

このケースは、特定の地区に人口移動や中心街の移行が起きているような地域にあてはまる。図3より一段階目は今すぐ、二段階目は9.2年後が最適投資タイミングであることが分かる。これも前ケース同様「一段階目は今すぐ、二段階目はしばらく待つ」にあてはまる。

ここで、一段階目のプロジェクトに注目すると、一段階目単独ではプロジェクトが実行されないことが分かる。これは補完性のあるプロジェクトを分割投資で考えることで、実行不可になったプロジェクトが実行可能になる、つまり、「プロジェクトの復活効果」がある場合があることを表している。



	一段階目	二段階目
投資額	80億円	160億円
年当たり純便益の初期値	6億円	10億円
年当たり純便益の変化率	-3%	1%

図3：混合地域の場合

5. おわりに

今回の研究では、一括投資と分割投資に着目することで、段階投資には「実施期限の引き延ばし効果」と「プロジェクトの復活効果」が期待できる場合があることが分かった。プロジェクトの中止や休止を決定する際には、これらの効果を十分に考慮する必要があると考える。

また、今回の研究では、プロジェクトリスクやプロジェクトの地域開発効果について考慮していない。これらを考慮したモデルを構築することが今後の課題である。

参考文献

[1] Takayuki UEDA, Ma.Sheilah A.GAABUCAYAN, Hisa MORISUGI (2002): Implement now or latter: An Inquiry into the Timing of Investment, 東京工業大学 土木工学科研究報告 No.65
 [2] 上田孝行, Ma.Sheilah A.Gaabucayan, 森杉壽芳 (2001): 公共事業の投資タイミングについて: 食べ頃と賞味期限の比喻, 運輸政策研究 Vol.5 No.1 pp.22-27
 [3] 西村清彦 (1990): 経済学のための最適化理論入門, 東京大学出版会