

両側制約型分布・配分統合モデルとシステム最適課金

東京大学大学院 正会員 ○円山琢也

東京大学大学院 正会員 原田 昇

1. はじめに

交通ネットワーク均衡分析における混雑料金政策の議論としては、固定需要型の利用者均衡モデルにおいて各リンクに限界費用課金を行うことで、総走行時間を最小化するシステム最適配分が達成できることがよく知られている。この料金システムは、独立需要関数による Beckmann 型需要変動モデルの場合でも社会的余剰を最大化するという意味で最適課金である¹⁾。

最近、Bellei, *et al.*²⁾は、以上の議論を一般化し、利用者の行動モデルが複数の利用者クラスで構成されたランダム効用理論に従う任意のモデルで、リンクコスト関数が相互干渉を表現する場合も含めた最適課金について、不動点問題を用いた議論を展開している。そして、最適化の目的関数を、行動モデルと整合的な利用者余剰と料金収入の和(社会的余剰)とおいた場合、限界費用原理が最適課金解の必要条件を満たす解の一つであることを証明している。特に、利用者の行動モデルが Nested Logit 型で、リンクコスト関数が分離型で表現される等価な最適化問題が構成可能な場合、限界費用課金が、Nest 型のログサム変数を用いて表現される利用者余剰と料金収入の和である社会的余剰を最大化することは容易に確認できる³⁾。

本研究では、両側制約型分布・配分統合モデルにおける最適課金を考える。片側制約型の分布モデルは、目的地選択モデルという解釈が可能のため、上記と同様な議論が展開できる。しかしながら、両側制約型の場合は、結論は必ずしも自明ではない。

これに関連して、Boyce, *et al.*⁴⁾は、両側制約型の分布・分担・配分統合モデルにおいて限界費用課金を実行した場合の議論を展開している。ただし、彼らは、限界費用課金を賦課した場合に、システムがどのような状況になるのかの考察が必ずしも十分では無く、単に様々な指標での比較を行うにとどまっている。本稿では、限界費用課金を行うことは、需要モデルと整合的な社会的余剰の最大化に等しいことを示す。なお、

理解の容易のため分布・配分のみを統合したモデルの場合を示すが、分担過程を統合した場合にも展開できる。

2. 両側制約付き分布・配分統合モデル

発生量と集中量がいずれも所与として与えられた場合に分布交通量と混雑を考慮した配分交通量を同時に求める両側制約付き分布・配分統合モデルは、周知のように次の最適化問題として定式化される⁵⁾。

[UE/DIST-DB]

$$\min Z(\mathbf{x}, \mathbf{q}) = \sum_a \int_0^{x_a} t_a(\omega) d\omega + \frac{1}{\gamma} \sum_{rs} q_{rs} \ln q_{rs} \quad (1)$$

$$\text{s.t. } \sum_k f_k^{rs} = q_{rs}, \quad x_a = \sum_{r,s,k} \delta_{a,k}^{rs} f_k^{rs}, \quad \sum_s q_{rs} = O_r, \\ \sum_r q_{rs} = D_s, \quad x_a \geq 0, f_k^{rs} \geq 0, q_{rs} \geq 0 \quad (2)$$

ここで、

O_r : ゾーン r からの発生交通量(所与)

D_s : ゾーン s への集中交通量(所与)

q_{rs} : OD ペア rs 間 OD 交通量

f_k^{rs} : OD ペア rs 間経路 k の経路交通量

x_a : リンク a の交通量

$t_a(x_a)$: リンク a のリンクコスト関数

$\delta_{a,k}^{rs}$: リンク経路接続行列

γ : パラメータ

この最適化問題の一階の条件を求めて整理すると、以下の二重制約型エントロピーモデルが導出される。

$$q_{rs} = A_r B_s O_r D_s \exp(-\gamma c_{rs}) \quad (3)$$

$$A_r = \left[\sum_s B_s D_s \exp(-\gamma c_{rs}) \right]^{-1} \quad (4)$$

$$B_s = \left[\sum_r A_r O_r \exp(-\gamma c_{rs}) \right]^{-1} \quad (5)$$

$$c_{rs} = \min_k \{c_k^{rs}\} = \min_k \{t_a(x_a) \delta_{a,k}^{rs}\} \quad (6)$$

c_k^{rs} は、OD ペア rs 間経路 k の経路費用、 c_{rs} は、そのうち最小の経路費用である。 A_r 、 B_s はバランシングファクターとも呼ばれる。

キーワード: 混雑料金, ネットワーク均衡モデル

連絡先: 〒113-8656 東京都文京区本郷 7-3-1, Tel.03-5841-6234, Fax03-5841-8527

3. システム最適と最適課金

さて，固定需要型の利用者均衡配分とシステム最適配分のアナロジーより，式(1)の目的関数第一項のリンクコスト積分項を，総交通費用項で置き換えた次の問題を考えてみよう．

[SO/DIST-DB]

$$\min Z^{SO}(\mathbf{x}, \mathbf{q}) = \sum_a x_a t_a(x_a) + \frac{1}{\gamma} \sum_{rs} q_{rs} \ln q_{rs} \quad (7)$$

s.t. (2)

この時点では，この目的関数の意味は不明であるが，後に明らかにされる．この問題の一階の条件を求めて整理すると，次式が得られる．

$$q_{rs} = A_r B_s O_r D_s \exp(-\gamma mc_{rs}) \quad (8)$$

$$A_r = \left[\sum_s B_s D_s \exp(-\gamma mc_{rs}) \right]^{-1} \quad (9)$$

$$B_s = \left[\sum_r A_r O_r \exp(-\gamma mc_{rs}) \right]^{-1} \quad (10)$$

$$mc_{rs} = \min_k \{ mc_k^{rs} \} = \min_k \left\{ t_a(x_a) + x_a \frac{\partial t_a(x_a)}{\partial x_a} \delta_{a,k}^{rs} \right\} \quad (11)$$

したがって，各リンク a に限界費用課金

$$p_a^{SO}(x_a) = x_a \frac{\partial t_a(x_a)}{\partial x_a} \quad (12)$$

が課せられている場合，前述した両側制約付き分布・配分統合モデルは，このモデル[SO/DIST-DB]と等しくなる．また，この場合の式(8)~(12)を元の目的関数式(7)に代入してみよう．まず，

$$\begin{aligned} \sum_{rs} q_{rs} \ln q_{rs} &= \sum_{rs} q_{rs} \ln [A_r B_s O_r D_s \exp(-\gamma mc_{rs})] \\ &= \sum_{rs} q_{rs} \ln(A_r O_r) + \sum_{rs} q_{rs} \ln(B_s D_s) - \gamma \sum_{rs} q_{rs} mc_{rs} \\ &= \sum_r O_r \ln(A_r O_r) + \sum_s D_s \ln(B_s D_s) - \gamma \sum_{rs} q_{rs} mc_{rs} \end{aligned} \quad (13)$$

が成立している．また，

$$mc_k^{rs} = mc_{rs}, \forall k, \text{ if } f_k^{rs} \neq 0 \quad (14)$$

であるから，

$$\begin{aligned} \sum_{rs} q_{rs} mc_{rs} &= \sum_{rs} mc_{rs} \sum_k f_k^{rs} = \sum_{rs} \sum_k mc_k^{rs} f_k^{rs} \\ &= \sum_a (t_a(x_a) + p_a^{SO}(x_a)) x_a = \sum_a x_a t_a(x_a) + \sum_a x_a p_a^{SO}(x_a) \end{aligned} \quad (15)$$

が成立する．したがって，

$$\begin{aligned} Z^{SO} &= \frac{1}{\gamma} \sum_r O_r \ln O_r + \frac{1}{\gamma} \sum_s D_s \ln D_s \\ &\quad + \frac{1}{\gamma} \sum_r O_r \ln A_r + \frac{1}{\gamma} \sum_s D_s \ln B_s - \sum_a x_a p_a^{SO}(x_a) \end{aligned} \quad (16)$$

となる．ここで，式(7)の最適化問題の意味を考えてみ

る．上式，右辺第一項と第二項は定数であるから無視すると，

$$\max. -Z^{SO} = -\frac{1}{\gamma} \left[\sum_r O_r \ln A_r + \sum_s D_s \ln B_s \right] + \sum_a x_a p_a^{SO}(x_a) \quad (17)$$

s.t. (2)

となる，式(17)右辺第一項は，Williams⁶⁾によって示された二重制約型エントロピーモデルと整合的な利用者余剰の式であり，第二項は，各リンクの最適混雑料金収入すなわち供給者余剰であり，それらの和は社会的余剰となる．したがって，両側制約型分布・配分統合モデルにおいても限界費用課金は，需要モデルと整合的な社会的余剰が最大化されるという意味での最適課金であることが分かる．これら最適課金・最適フローパターンは，ネットワーク均衡モデルの標準的な解法⁵⁾を用いれば，大規模な都市圏でも効率的に求めることができる．

4. 結論

両側制約付き分布・配分統合モデルの文脈においても限界費用課金は，需要モデルと整合的な社会的余剰が最大化されるという意味での最適課金であることを明らかにした．道路混雑を考慮した最適職住配置などへの応用が考えられる基本的な知見といえよう．

参考文献

- 1) Yang, H. and Huang, H.: Principle of marginal-cost pricing: How does it work in a general road network?, *Transportation Research Part A*, Vol. 32, No.1 pp. 45-54, 1998.
- 2) Bellei, G., Gentile, G. and Papola, N.: Network pricing optimization in multi-user and multimodal context with elastic demand, *Transportation Research Part B*, Vol. 36, No. 9, pp. 779-798, 2002.
- 3) 円山琢也，原田昇，太田勝敏: Nested Logit 型確率的利用者均衡条件下での最適混雑料金，土木計画学研究・論文集，投稿中．
- 4) Boyce, D.E., Balasubramaniam, K., and Tian, X.: Implications of marginal cost road pricing for urban travel choices and user benefits, in Gendreau, M. and Marcotte, P. (eds.) *Transportation and Network Analysis: Current Trends*, Kluwer Academic Publishers, chapter 3, pp. 37-48, 2002.
- 5) 土木学会: 交通ネットワークの均衡分析-最新の理論と解法-, 丸善, 1998.
- 6) Williams, H. C. W. L.: Travel demand models, duality relations and user benefit analysis, *Journal of Regional Science*, Vol. 16, No. 7, pp. 147-166, 1976.