

回転ばねを考慮した軌道変形の理論解析

東海旅客鉄道株式会社 正会員 川崎 祐征

1. はじめに

軌道の上下方向の静的変形に関する理論解析モデルとして、大域的な特性を把握する場合には連続弾性支持モデル¹⁾が、より詳細な特性を把握する場合には有限間隔支持モデル²⁾が一般的に用いられている。しかし、これらの理論解析モデルは線路直角方向を軸とする回転抵抗を考慮していないため、まくらぎ幅やレール締結装置の支持長さを拡大した場合の軌道変形を精度良く解析することは困難である。

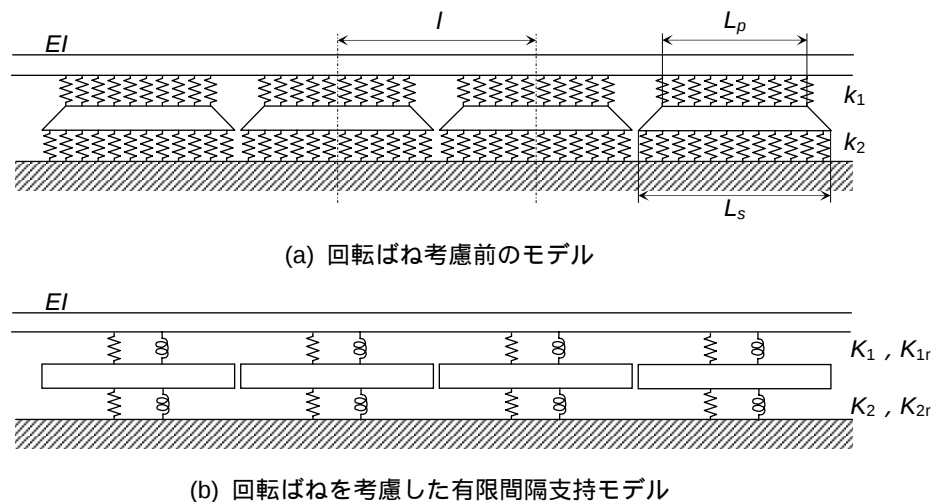
そこで本稿では、まくらぎやレール締結装置の回転抵抗、すなわち回転ばねを考慮した有限間隔支持モデルによる軌道変形の理論解を示すとともに、本モデルによる軌道の静的変形の解析結果の一例を紹介する。

2. 理論解析モデルおよび解法^{3) 4)}

図1(a)に示す、単位長さあたりのばね定数 k_2 の路盤上に幅 L_s のまくらぎが間隔 l で敷設され、曲げ剛性 EI のレールが単位長さあたりのばね定数 k_1 ・長さ L_p の軌道パッドを介してまくらぎ上に敷設されている軌道モデルを考える。これを図1

(b)のように回転ばねを考慮した有限間隔支持モデルとしてモデル化すると、鉛直ばね定数 K_1 、 K_2 および回転ばね定数 K_{1r} 、 K_{2r} は以下の式により求められる。

$$\left. \begin{aligned} K_1 &= k_1 L_p \\ K_2 &= k_2 L_s \\ K_{1r} &= \frac{1}{12} K_1 L_p^2 \\ K_{2r} &= \frac{1}{12} K_2 L_s^2 \end{aligned} \right\} \cdots \text{式(1)}$$



(a) 回転ばね考慮前のモデル

(b) 回転ばねを考慮した有限間隔支持モデル

回転ばねを考慮した軌道変形の解法を示すにあたり、図2のような3区間分のモデルを考える。なお、図2中の鉛直ばね定数 K_p および回転ばね定数 K_r は以下の式による。

$$\frac{1}{K_p} = \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2}, \quad \frac{1}{K_r} = \frac{1}{K_{1r}} + \frac{1}{K_{2r}} \quad \cdots \text{式(2)}$$

区間 n のレール左端 ($x_n=0$) および右端 ($x_n=l$) における状態量ベクトル $\mathbf{Y}_n(0)$ および $\mathbf{Y}_n(l)$ を

$$\mathbf{Y}_n(0) = \{y_n(0) \quad \theta_n(0) \quad M_n(0) \quad V_n(0) \quad 1\}^T, \quad \mathbf{Y}_n(l) = \{y_n(l) \quad \theta_n(l) \quad M_n(l) \quad V_n(l) \quad 1\}^T \quad \cdots \text{式(3)}$$

により定義する。ただし、 y_n はたわみ量、 θ_n はたわみ角、 M_n はモーメント、 V_n はせん断力を表す。

キーワード：軌道力学，軌道構造，回転ばね，静的解析

連絡先：〒485-0801 愛知県小牧市大山 1545 番 33 Tel. 0568-47-5380 FAX 0568-47-5364

図1 理論解析モデル

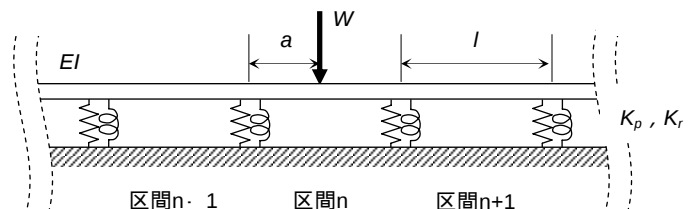


図2 载荷区間を有するばね支承上のはり

区間 $n-1$ における状態量ベクトル $\mathbf{Y}_{n-1}(0)$ と区間 n における状態量ベクトル $\mathbf{Y}_n(0)$ との関係，および区間 n における状態量ベクトル $\mathbf{Y}_n(l)$ と区間 $n+1$ における状態量ベクトル $\mathbf{Y}_{n+1}(l)$ との関係は以下の式により表される．

$$\mathbf{Y}_n(0) = \mathbf{U}\mathbf{F}\mathbf{Y}_{n-1}(0), \quad \mathbf{Y}_{n+1}(l) = \mathbf{F}\mathbf{U}\mathbf{Y}_n(l) \quad \dots\dots\dots \text{式(4)}$$

$$\text{ただし, } \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & -l & -l^2/2EI & -l^3/6EI & 0 \\ 0 & 1 & l/EI & l^2/2EI & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_r & 1 & 0 & 0 \\ K_p & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots \text{式(5)}$$

また，輪重 W が載荷された区間 n における状態量ベクトル $\mathbf{Y}_n(0)$ および $\mathbf{Y}_n(l)$ との関係は，

$$\mathbf{Y}_n(l) = \mathbf{P}\mathbf{Y}_n(0) \quad \dots\dots\dots \text{式(6)}$$

$$\text{ただし, } \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & -l & -l^2/2EI & -l^3/6EI & W(l-a)^3/6EI \\ 0 & 1 & l/EI & l^2/2EI & -W(l-a)^2/2EI \\ 0 & 0 & 1 & l & -W(l-a) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -W \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots \text{式(7)}$$

よって，図2における $\mathbf{Y}_{n-1}(0)$ と $\mathbf{Y}_{n+1}(l)$ との関係を表す式は，式(4)および(6)より

$$\mathbf{Y}_{n+1}(l) = \mathbf{F}\mathbf{U}\mathbf{P}\mathbf{F}\mathbf{Y}_{n-1}(0) \quad \dots\dots\dots \text{式(8)}$$

と表すことができる．ここで境界条件

$$M_{n-1}(0) = K_r \cdot \theta_{n-1}(0), \quad V_{n-1}(0) = K_p \cdot y_{n-1}(0), \quad M_{n+1}(l) = -K_r \cdot \theta_{n+1}(l), \quad V_{n+1}(l) = -K_p \cdot y_{n+1}(l) \quad \dots\dots \text{式(9)}$$

を式(8)に代入すると $y_{n-1}(0)$ ， $\theta_{n-1}(0)$ ， $y_{n+1}(l)$ および $\theta_{n+1}(l)$ に関する連立一次方程式になるので，これを解くことにより軌道の変形が求められる．なお，解析区間を長くする場合は，伝達マトリクス $\mathbf{F}$ および $\mathbf{U}$ を式(8)において必要数考慮すればよい．

表1 解析条件

3．解析結果例

回転ばねを考慮したモデルによる軌道変形の解析例として，軌道パッド長さが軌道変形に与える影響を解析した．解析条件は表1に示すとおりであり，解析区間数は19（支点数20），載荷区間は第10区間の中央とした．

解析結果のうち，まくらぎ下面圧力の解析

結果を図3に示す．この

例より，回転ばねを考慮した理論解析モデルを用いることで，従来の理論解析モデル²⁾では困難であった軌道パッド長さが軌道変形に与える影響を解析することが可能であることがわかる．

項 目		記号	単位	数 値	
				条件 1	条件 2
レール	曲げ剛性	EI	$\text{N} \cdot \text{m}^2$	6.34×10^6	→
軌道 パッド	鉛直ばね定数	K_1	MN/m	60	→
	長さ	L_p	mm	180	360
まくらぎ	幅	L_s	mm	750	→
	長さ	B	mm	2000	→
路 盤	鉛直ばね定数	K_2	MN/m	300	→
レール締結間隔		l	mm	800	→
輪 重		W	kN	80	→

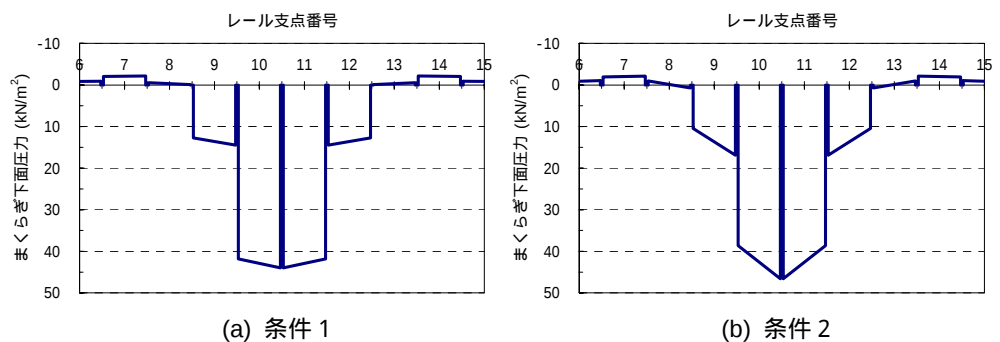


図3 軌道パッド長さの変更が軌道に与える影響

参考文献 1) 佐藤裕：「軌道力学」，鉄道現業社，1964.11，p.p.10-14 2) 宮本俊光，渡辺偕年：「線路 - 軌道の設計・管理」，山海堂，1980.7，p.p.439-453 3) Klaus Knothe："Gleisdynamik"，Ernst & Sohn，2001，p.p.170-173 4) (社)土木学会：「構造力学公式集(昭和61年版)」，1986.6，p.p.186-188