

指数関数系数学モデルと極値分布との関係

首都高速道路公団 正会員 ○山田 淳
 日本道路公団 名古屋技術事務所 正会員 篠田 雅男
 東海大学 正会員 冬木 衛
 正会員 宇都 一馬

1. まえがき

筆者らは、主として地盤工学分野における諸現象を表現しうる指数関数系の数学モデルをすでに提案している。¹⁾ このモデルは、強い非線形性を呈する現象を少数のパラメータで表現でき、かつ、このパラメータを回帰係数として最小2乗法で決定できるところに特徴がある。²⁾ 筆者らは、この手法を杭や地盤の載荷試験結果、土のせん断試験の応力 - ひずみ曲線、圧密現象の評価などに利用している。³⁾

一方、統計学の1分野として極値統計学がある。⁴⁾ これは、洪水や渇水など極めてまれにしか発生しない事象や荷重、材料強度などの最小値あるいは最大値（いわゆる極値）に関する統計学であり、すでに確立された分野とされる。これらの一部は、信頼性・保全性工学の分野では必須のものであり、土木工学のある分野では利用されている。

提案した数学モデルと、極値分布（確率分布曲線）の一部のものが対応（形状が一致）することがすでに明らかになっている。本論文は、その概要をまとめたものである。

2. 指数関数系の数学モデルについて

図 - 1 は、変数 x , y の関係を模式的に示したもので、これより2つの微分方程式が誘導できる。変数 y の変化量が、 x のべき乗と y のべき乗の積に比例するもの（以下タイプ (1)）、変数 y の変化量が、 x のべき乗と潜在量 $(y_0 - y)$ のべき乗の積に比例するもの（以下タイプ (2)）を示す。

$$\text{タイプ (1)} \quad \frac{dy}{dx} = kx^{m-1}y^{n-1} \cdots (1), \quad \text{タイプ (2)} \quad \frac{dy}{dx} = kx^{m-1}(y_0 - y)^{n-1} \cdots (2)$$

ここで、 y_0 は一種の飽和値、 m , n は任意の実数である。

この一般解は、 m と n の組み合わせによってそれぞれについて、べき関数になるもの、対数関数になるもの、指数関数になるものに分類できる。この内、指数関数のタイプのものを適当な境界条件で解いたものをそれぞれ式 (3)、式 (4) で示す。誘導等の詳細は文献 1) を参照されたい。

$$\text{タイプ (1)} \quad y = a \cdot \exp \left\{ - \left(\frac{x}{b} \right)^m \right\}, \quad m \neq 0 \cdots (3)$$

$$\text{タイプ (2)} \quad y = a \left[1 - \exp \left\{ - \left(\frac{x}{b} \right)^m \right\} \right], \quad m \neq 0 \cdots (4)$$

図 - 2, 図 - 3 は、式 (3) および式 (4) をそれぞれ図化したもので、縦軸は y/a 、横軸は x/b と正規化してある。なお、図中の実線は $m > 0$ 、破線は $m < 0$ の場合を表す。

3. 極値分布について

極値分布は、種々の表記方法があるのでここでは文献 5) によった。

キーワード 数学モデル、極値統計学、回帰計算

連絡先 〒110-8930 東京都千代田区霞が関 1 - 4 - 1 (日土地ビル) 首都高速道路公団 TEL 03-3539-9513

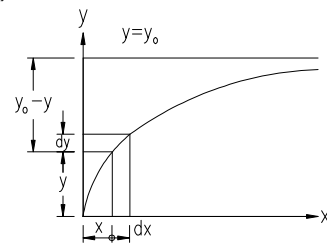


図 - 1 変数 x , y の関係の模式図

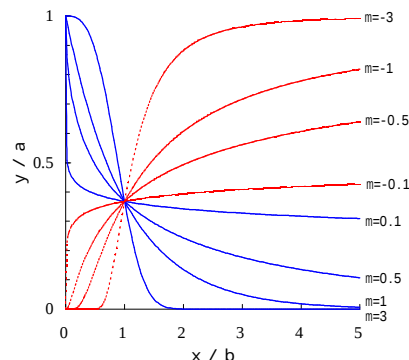


図 - 2 タイプ (1)

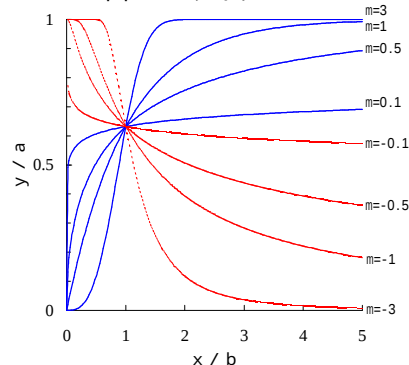


図 - 3 タイプ (2)

確率変数 X の漸近極値分布には、種から種の3種あり、それぞれに、極小値と極大値の分布がある。これらは、式(5)から式(10)で表される。

極小値分布		極大値分布	
第 種	$S; F_S(x) = 1 - \exp \left[-\exp \left\{ \frac{(x-g)}{a} \right\} \right] \quad \cdots (5),$ $-\infty < x < \infty, a > 0$	$L; F_L(x) = \exp \left[-\exp \left\{ \frac{-(x-g)}{a} \right\} \right] \quad \cdots (8)$ $-\infty < x < \infty, a > 0$	
第 種	$S; F_S(x) = 1 - \exp \left[-\left\{ \frac{-(x-g)}{a} \right\}^{-b} \right] \quad \cdots (6),$ $-\infty < x \leq g, a, b > 0$	$L; F_L(x) = \exp \left[-\left\{ \frac{(x-g)}{a} \right\}^{-b} \right] \quad \cdots (9)$ $g \leq x < \infty, a, b > 0$	
第 種	$S; F_S(x) = 1 - \exp \left[-\left\{ \frac{(x-g)}{a} \right\}^b \right] \quad \cdots (7),$ $g \leq x < \infty, a, b > 0$	$L; F_L(x) = \exp \left[-\left\{ \frac{-(x-g)}{a} \right\}^b \right] \quad \cdots (10)$ $-\infty < x \leq g, a, b > 0$	

ここで、 $F_S(x)$ は極小値の、 $F_L(x)$ は極大値の確率分布曲線をそれぞれ表す。なお、 α は尺度のパラメータ、 β は形のパラメータ、 γ は位置のパラメータと呼ばれる量である。

4. 両者の関係

第 種と第 種の極値分布と数学モデルの形状との相似性について考察する。

3. の極値分布において、 $F(x) = y$, $\alpha = b$, $\beta = m$, $\gamma = 0$ (これは x 軸におけるバイアスであるから x を $x - \gamma$ と考えてもよい) とおく。一方、2. の数学モデルにおいて $a = 1$ (100%の意味) とおく。

例えば、式(6)と、式(4)で $m < 0$ 場合の両者の形状は、同一になることが分かる。これは、図-3の $m < 0$ の場合に相当する。まとめると、以下の関係が得られる。

$$\left[\begin{array}{l} \text{式(6)} [S] \leftrightarrow \text{式(4)} [\text{タイプ - 3}] \text{の } m < 0 \rightarrow \text{図-3の } m < 0 \text{ に対応} \\ \text{式(7)} [S] \leftrightarrow \text{式(4)} [\text{タイプ - 3}] \text{の } m > 0 \rightarrow \text{図-3の } m > 0 \text{ に対応} \\ \text{式(9)} [L] \leftrightarrow \text{式(3)} [\text{タイプ - 3}] \text{の } m < 0 \rightarrow \text{図-2の } m < 0 \text{ に対応} \\ \text{式(10)} [L] \leftrightarrow \text{式(3)} [\text{タイプ - 3}] \text{の } m > 0 \rightarrow \text{図-2の } m > 0 \text{ に対応} \end{array} \right]$$

なお、第 種の極値分布は、第 種あるいは第 種の確率変数 X を、対数変換して得られる。

5. 若干の考察

1) 式(7) [S] はワイブル分布といわれるもので、 $x = t$ (時間), $\alpha = \eta$, $\beta = m$ に置換えるのが一般的である。これは、スウェーデンの物理学者 W. Weibull が材料の破壊強度の分布を表示するために、経験的かつ直感から提唱したとされる。n 個のリングからなる鎖を考えると、鎖全体の強度の信頼度を表すものとして提案した。これに対し、式(10) [L] は、鎖全体の強度の信頼度を表すものである。その後、J.H.K. Kao によってこの分布は発展させられ、現在の信頼性工学に至っている。

2) パラメータの決定は、極値統計学では分布ごとに工夫された確率紙によって求めるのが一般的である。一方、提案した数学モデルでは最小2乗法によって決定できる。両者の形状の相似性から極値分布のパラメータを最小2乗法で求めることが可能と考えられる。これについては、別の機会に述べたい。

6. まとめ

今回、筆者ら提案している指数関数系数学モデルと極値統計における一部の確率分布曲線との相似性について述べた。今後、筆者らの数学モデルを確率現象として見直し、さらに議論を進めてゆきたい。本報文が、地盤工学における信頼性設計あるいは限界状態設計法の一助になれば幸いである。

参考文献

- 1) 宇都・冬木・桜井；地盤工学における数学モデルについて，第23回土質工学研究発表会，地盤工学会，1988.
- 2) 宇都・冬木・桜井；指数関数系の回帰式のまとめ，第21回土質工学研究発表会，地盤工学会，1986.
- 3) 宇都・冬木・桜井；指数関数系数学モデルの地盤工学への適用，地盤工学におけるリスク評価手法に関するシンポジウム，地盤工学会，1987.
- 4) E. J. グンベル著・河田・岩井・加瀬訳；極値統計学，生産技術センター新社，1978.
- 5) たとえば，市田・鈴木；信頼性の分布と統計，日科技連，1984.