密度･拘束応力の違いを考慮した砂の等方硬化型弾塑性モデル

名 古 屋 工 業 大 学　　正 会 員　〇檜尾 正也　中井 照夫

はじめに

地盤上または地盤中に何らかの構造物を経済的かつ安全につくるには、設計段階での高精度の変形予測が重要となる。変形予測が重要である理由として、地盤の変形と強度は独立ではなく相互に影響を及ぼし合っていることが挙げられる。したがって、種々の条件下の地盤において変形を考慮せずに初期地盤の強度定数(c,ϕ)だけで支持力等を正確に算出することは不可能である。そこで、近年は有限要素法等の解析手法を用いた変形予測が広く行われている。この有限要素解析を高精度に行うには地盤材料の変形･強度特性を適切に表現できる構成モデルを用いる必要がある。しかし、残念なことにこの構成モデルに関する議論は実務レベルではほとんどなされていない。そこで、本論文では、有限要素解析のコアとなる構成式が備えるべき特徴を示すとともに、すでに提案している等方硬化型の弾塑性構成モデル(*subloading* t_{ij}*-model*)[1),2)]の適用性を検討する。

構成モデルの概要

構成モデルの備えるべき主な特徴として①中間主応力がおよぼす強度への影響、②塑性ひずみ増分方向の応力経路依存性、③正負の両ダイレイタンシー、④ひずみ軟化挙動、⑤密度や拘束応力の変形強度への影響がある。

まず、変形･強度におよぼす中間主応力の影響を同一パラメーターで説明するために、通常の応力σ_{ij}ではなく修正応力 t_{ij} に基づく応力･ひずみ増分パラメーターを用いて定式化する(**Table 1** 参照)。ここで、降伏関数はt_{ij}空間で関連流動則が成り立つと仮定し、応力比～塑性ひずみ増分比関係式(**Fig. 1** 参照)と直交条件（$dt_N \cdot d\varepsilon_{SMP}^{*p}+dt_S \cdot d\gamma_{SMP}^{*p}=0$）から次式で与えられる。

Table 1　通常およびt_{ij}の概念による応力およびひずみ増分パラメーター

	ordinary concept	t_{ij} concept
tensor normal to reference plane	δ_{ij} (unit tensor)	a_{ij} (tensor normal to SMP)
stress tensor	σ_{ij}	$t_{ij}=a_{ik}\sigma_{kj}$
mean stress	$p=\sigma_{ij}\,\delta_{ij}/3$	$t_N=t_{ij}a_{ij}$
deviatoric stress tensor	$s_{ij}=\sigma_{ij}-p\delta_{ij}$	$t'_{ij}=t_{ij}-t_N a_{ij}$
deviatoric stress	$q=\sqrt{(3/2)s_{ij}s_{ij}}$	$t_S=\sqrt{t'_{ij}t'_{ij}}$
stress ratio tensor	$\eta_{ij}=s_{ij}/p$	$x_{ij}=t'_{ij}/t_N$
stress ratio	$\eta\equiv q/p=\sqrt{(3/2)\eta_{ij}\eta_{ij}}$	$X\equiv t_S/t_N=\sqrt{x_{ij}x_{ij}}$
strain increment normal to reference plane	$d\varepsilon_v=d\varepsilon_{ij}\delta_{ij}$	$d\varepsilon^*_{SMP}=d\varepsilon_{ij}a_{ij}$
deviatoric strain increment tensor	$de_{ij}=d\varepsilon_{ij}-d\varepsilon_v\,\delta_{ij}/3$	$d\varepsilon'_{ij}=d\varepsilon_{ij}-d\varepsilon^*_{SMP}a_{ij}$
strain increment parallel to reference plane	$d\varepsilon_d=\sqrt{(2/3)de_{ij}de_{ij}}$	$d\gamma^*_{SMP}=\sqrt{d\varepsilon'_{ij}d\varepsilon'_{ij}}$

$$f=\ln t_N+\frac{1}{\beta}\left(\frac{X}{M^*}\right)^{\beta}-\ln t_{N1}=0 \qquad (1)$$

ここに、βは材料パラメーター、M^*は応力比～塑性ひずみ増分比関係の縦軸切片で、三軸圧縮条件下の critical state での主応力比R_{CS}との関係は以下のようになる。

$$M^*=\left(X_{CS}{}^{\beta}+X_{CS}{}^{\beta-1}Y_{CS}\right)^{1/\beta} \qquad (2)$$

$$X_{CS}=\frac{\sqrt{2}}{3}\left(\sqrt{R_{CS}}-\frac{1}{\sqrt{R_{CS}}}\right) \qquad (3)$$

$$Y_{CS}=\frac{1-\sqrt{R_{CS}}}{\sqrt{2}\left(\sqrt{R_{CS}}+0.5\right)} \qquad (4)$$

塑性ひずみ増分$d\varepsilon_{ij}^p$はt_{ij}空間での流れ則より次式で計算される。

$$d\varepsilon_{ij}^p=\Lambda\frac{\partial f}{\partial t_{ij}} \qquad \left(\Lambda=\frac{df}{h^p}\right) \qquad (5)$$

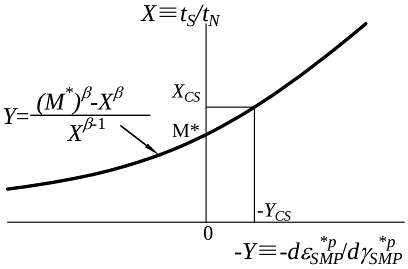

Fig. 1　応力比～塑性ひずみ増分比関係

次に、変形･強度におよぼす密度・拘束応力の影響を考慮するため橋口の subloading surface の考え方[3)]を参考に密な砂を過圧密粘土，非常に緩い砂を正規圧密粘土とみなし、従前のt_{ij}*-clay model*[4)]を拡張して定式化[1),2)]を行うとΛは次式のようになる。

$$\Lambda=\frac{df}{h^p}=\frac{df}{\dfrac{1}{C_p}\left(\dfrac{\partial f}{\partial t_{ii}}+\dfrac{G(d)}{t_N}\right)} \qquad G(d)=a\cdot d^2 \qquad (a：材料パラメーター) \qquad (6)$$

ここで、dは**Fig. 2** に示すように、同じ応力状態にある正規圧密状態の砂(状態 B)と密な砂(状態 A)の間隙比の差であり、下負荷面(実線)および正規降伏面(破線)の大きさの比t_{N1e}/t_{N1}(過圧密比に相当する)を用いて$d=(\lambda-\kappa)\ln(t_{N1e}/t_{N1})$で表される。このような定式化を行うことによって、ひずみ軟化や正負の両ダイレイタンシーおよび密度や拘束応力の影響を考慮できるモデルとなっている。

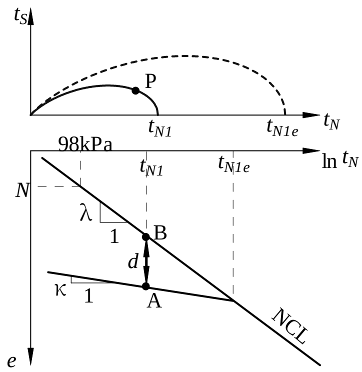

Fig. 2　下負荷面、正規降伏面、dの説明

通常の塑性論によれば塑性ひずみ増分方向は応力増分方向の影響を受けず応力状態が決まれば唯一的に決まることになる。しかし、実測値によれば破壊時を省いて応力経路により塑性ひずみ増分比（塑性ひずみ増分方向）が応力経路の影響をうけることになる。このような挙動を説明するため、*subloading* t_{ij}*-model*では、降伏関数やひずみ硬化パラメーター（塑性体積ひずみ）はそのままで、全塑性ひずみ増分を関連流れ則に従う塑性ひずみ増分$d\varepsilon_{ij}^{p(AF)}$と等方的な圧縮成分$d\varepsilon_{ij}^{p(IC)}$の和で与え、応力経路依存性を表現している。ここでは(7)式および**Fig.3** に示すようにひずみ増分の発生方法を４つの領域に分ける。Ⅰ,Ⅱ,Ⅲ領域は

キーワード：構成モデル、弾塑性、密度

連絡先 名古屋工業大学 (住所：名古屋市昭和区御器所町、電話・FAX：052-735-7157)

従来のモデルと同様だが新たにIV領域を設けている。IV領域では(5)式のΛが正であっても(9)式の$\Lambda^{(AF)}$が負となることから$d\varepsilon_{ij}^{p(AF)}$が降伏曲面の内側を向くことになる($d\varepsilon_{ij}^{p(AF)}+d\varepsilon_{ij}^{p(IC)}$は降伏曲面の外側を向く)。この状態を避けるためこのIV領域では$\varepsilon_{ij}^{p(IC)}$のみ発生すると仮定すると、後続負荷条件($df=0$)からIII領域,IV領域での$d\varepsilon_{ij}^{p(IC)}$が(10)式のように与えられる。

$$\begin{cases} d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^{e} & :\text{I 領域}(\Lambda < 0) \\ d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^{e} + d\varepsilon_{ij}^{p} = d\varepsilon_{ij}^{e} + d\varepsilon_{ij}^{p(AF)} & :\text{II 領域}(\Lambda \ge 0, dt_N < 0) \\ d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^{e} + d\varepsilon_{ij}^{p} = d\varepsilon_{ij}^{e} + d\varepsilon_{ij}^{p(AF)} + d\varepsilon_{ij}^{p(IC)} & :\text{III領域}(\Lambda \ge 0, dt_N \ge 0, df - dt_N/t_{N1} \ge 0) \\ d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^{e} + d\varepsilon_{ij}^{p} = d\varepsilon_{ij}^{e} + d\varepsilon_{ij}^{p(IC)} & :\text{IV領域}(\Lambda \ge 0, dt_N \ge 0, df - dt_N/t_{N1} < 0) \end{cases} \tag{7}$$

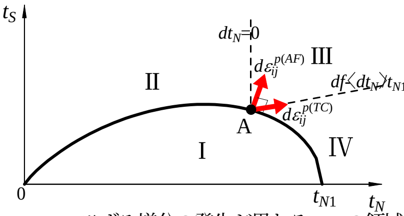

Fig. 3　ひずみ増分の発生が異なる４つの領域

$$d\varepsilon_{ij}^{e} = \frac{1+\nu_e}{E_e} d\sigma_{ij} - \frac{\nu_e}{E_e} d\sigma_{kk}\delta_{ij} \tag{8}$$

$$d\varepsilon_{ij}^{p(AF)} = \Lambda^{(AF)} \cdot \frac{\partial f}{\partial t_{ij}} = \frac{df - \frac{1}{t_{N1}}\langle dt_N \rangle}{\frac{1}{C_p}\left(\frac{\partial f}{\partial t_{ii}} + \frac{G^{(AF)}(d)}{t_N}\right)} \cdot \frac{\partial f}{\partial t_{ij}} \tag{9}$$

$$d\varepsilon_{ij}^{p(IC)} = \begin{cases} \dfrac{\frac{1}{t_{N1}}\langle dt_N \rangle}{\frac{1}{C_p}\left(1 + \frac{G^{(IC)}(d)}{a_{kk}}\right)} \cdot \dfrac{\delta_{ij}}{3} & :\text{III領域} \\ \Lambda^{(IC)} \cdot \dfrac{\delta_{ij}}{3} = \dfrac{df}{\frac{1}{C_p}\left(1 + \frac{G^{(IC)}(d)}{a_{kk}}\right)} \dfrac{\delta_{ij}}{3} & :\text{IV領域} \end{cases} \tag{10}$$

$$G^{(AF)}(d) = a^{(AF)} \cdot d^2$$
$$G^{(IC)}(d) = a^{(IC)} \cdot d^2 \tag{11}$$

Table. 2　豊浦砂の材料パラメーター

λ		0.07	Cam-clay model と同様のパラメーター
κ		0.0045	
$N=e_{NC}$ at p=98kPa & q=0kPa		1.1	
$R_{CS}=(\sigma_1/\sigma_3)_{CS}$ (comp.)		3.5	
ν_e		0.2	
β		2.0	降伏面の形状(β=1 で Cam-clay と同じ)
a	$a^{(AF)}$	30	密度や拘束応力の影響
	$a^{(IC)}$	500	

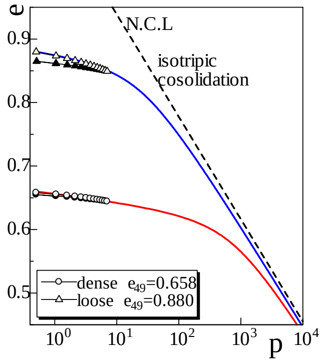

Fig. 4　等方圧密試験の実験結果と解析結果

上式のように塑性ひずみ増分を与えることにより、正規圧密状態（$G(d)=0$）では既往の t_{ij}-*clay model* に一致し、密度や拘束応力の異なる砂のひずみ挙動が表現可能である。**Table 2** に解析に用いた砂の材料パラメーターを示す

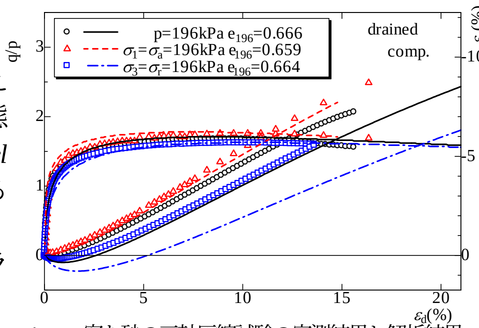

Fig. 5　密な砂の三軸圧縮試験の実測結果と解析結果

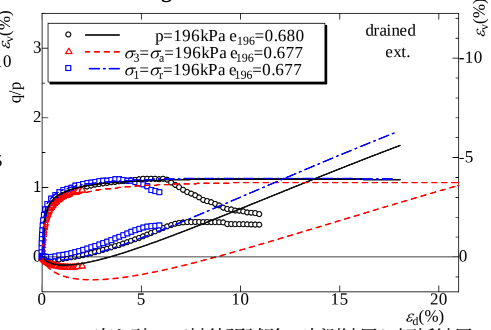

Fig. 6　密な砂の三軸伸張試験の実測結果と解析結果

実験結果との比較

Fig. 4 に等方圧密時の平均応力(p)～間隙比(e)関係の実測結果と解析結果を示す。**Fig. 5**,**Fig. 6** には密な砂，**Fig. 7**,**Fig. 8** には緩い砂の三軸試験結果と解析結果を示す。また，**Fig. 9**,**Fig. 10** では密な砂，緩い砂の三軸圧縮応力条件下での異方圧密試験結果と解析結果を示す。これらの図から解析結果は中間主応力の強度に対する影響，密度の違いによる変形・強度の差異等の実測結果にみられる砂の変形・強度特性を妥当に表現している。さらに異方圧密では同じ応力状態であっても密度の違いによってひずみ増分方向が異なる実測値の傾向を解析値では表現可能となっている。これは、(7)式のように全塑性ひずみ増分を関連流れ則に従う成分と等方的な圧縮成分$^{(IC)}$に分け、それぞれ密度の影響を $G^{AF}(d)$, $G^{IC}(d)$ により考慮しているためである。以上のことから *subloading* t_{ij}-*model* は砂の主な特徴を妥当に表現でき、地盤の変形解析に有用であることが分かる。

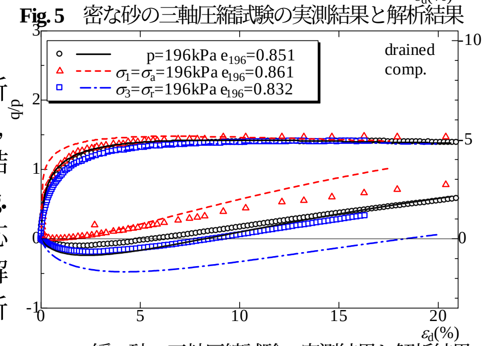

Fig. 7　緩い砂の三軸圧縮試験の実測結果と解析結果

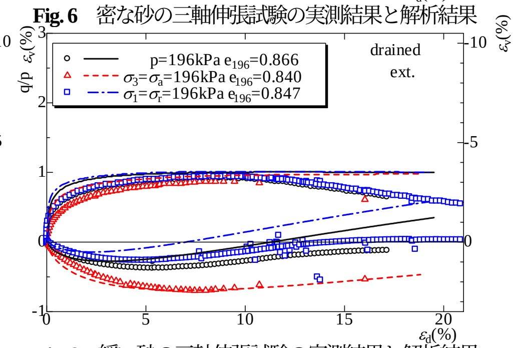

Fig. 8　緩い砂の三軸伸張試験の実測結果と解析結果

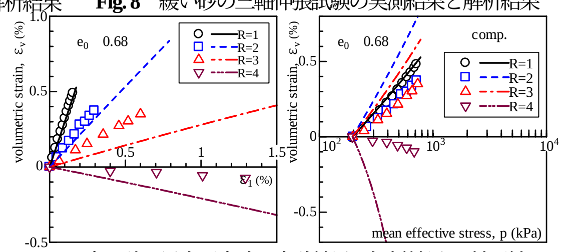

Fig. 9　密な砂の異方圧密時の実験結果と解析結果(三軸圧縮)

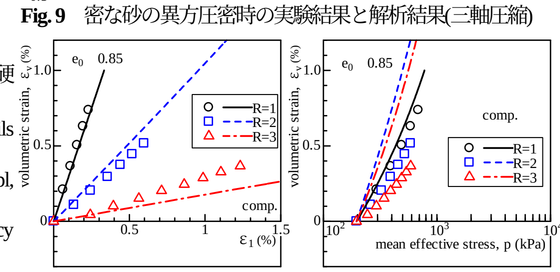

Fig. 10　緩い砂の異方圧密時の実験結果と解析結果(三軸圧縮)

《参考文献》1)中井照夫・檜尾正也・城戸拓・西村智・宮田真由美(2002)：正規・過圧密土の等方硬化モデル，第 37 回地盤工学研究発表会,pp.379-380

2)T. Nakai & M. Hinokio (2002): An isotropic hardening model for normally and over consolidated soils with t_{ij}-concept and subloading surface concept, proc. of IWS-Calgary,pp.3-16

3)K. Hashiguchi(1980)：Constitutive equation of elastoplastic materials with elasto-plastic transition, j. Appl, Mech., ASME, Vol.102, No.2, pp.266-272

4)Nakai, T(1989):An isotropic hardening elastoplastic model for sand considering the stresspath dependency in three-dimensional stresses, Soils and Foundations, Vol. 29, No. 1, pp.119-137