

透水係数分布の相違による地下水位変分評価と最適モデル選択

京都大学防災研究所 正会員 浜口 俊雄

1. 序論

広域地下水解析では、観測データの量と質に適う範囲でモデル誤差の小さな地下水モデルを選択する。その際、透水係数の空間分布設定が論点となる。本稿では、透水係数が不均一分布の平面地下水モデルを様々な分布で評価した場合に言及し、モデル誤差を補完した結果とその選択した最適モデルを示す。

2. 有限要素解の吟味と水位変分

本稿では平面地下水モデルの基礎式として、線形化 Boussinesq 方程式 (1) を用いる。この有限要素方程式は式 (2)~(4) の様に表せる。M は貯留行列、S は透水行列と呼ばれ、後者は透水係数 k を含む。境界水位による縮約処理が既に施された下で、式 (2) は式 (5) の様に解ける。ここで、||M|| と $\theta \Delta t ||S||$ の大小関係を考えながら A⁻¹ を級数展開した結果が式 (6) である。式 (6) を式 (5) に代入して整理すると式 (7) が得られる。

次に、上記とは異なる空間分布を持つ透水係数 \hat{k} のモデルで、上記と同様にして解 \hat{h}_{t+1} を求める。続いて透水係数の空間分布に関する時間 t+1 の水位変分 $\delta h_{t+1} = h_{t+1} - \hat{h}_t$ を求める。いま検討を容易にすべく、両者に時間 t の水位を同じ状態 ($h_t = \hat{h}_t$) とおく。これにより、比較的容易に δh_{t+1} の式 (8) を得る。S の変分 δS 、又は S⁻¹ の変分 δS^{-1} が変量となっているために、透水係数の空間分布の違いが各時間 δh_{t+1} ずつ解に累積的な影響を及ぼすことがわかる。仮に、 k, \hat{k} を用いたモデルがそれぞれ真の分布とそのモデル分布を示すならば、 δh_{t+1} は逐次的なモデル誤差を表すことになる。本稿では、不均一分布のモデルを真として様々な分布のモデルを想定し、真の流動構造に対して δh_{t+1} を地盤統計学に基づいて推定し、真値を推定する。

3. 地盤統計学的推定によるモデル誤差補完

真値 $\phi(z, t)$ をトレンド成分 $m(z, t)$ とランダム成分 $w(z, t)$ に分解すると式 (9) の様になる。ここでトレンド成分は不確定的な一定の偏り \hat{b} (定数) を持つと同時にモデル解析解 $f(z, t)$ で構成されると考える。また不確定成分 $\eta(z, t)$ は \hat{b} とランダム成分から成ると捉える。いま $\eta(z, t)$ が時間に独立なものと仮定し、 $\eta(z)$ と書き改める。同じく $w(z, t)$ も $w(z)$ と改める。本稿では、 $\eta(z)$ を地盤統計モデルで評価することを考える。kriging¹⁾ に基づく $\eta(z)$ の空間推定結果は式 (10) となる。以上より、推定値 $\phi^*(z, t)$ は式 (11)²⁾ のように求められる。

$$\lambda \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k d_0 \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k d_0 \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \varepsilon \quad (1)$$

(λ: 有効間隙率, h: 水頭, k: 透水係数, d₀: 平均水深, ε: 涵養量)
 $A h_{t+1} = B h_t + \omega_{t+\theta}$ (注: 両辺は境界水位で縮約済とする) (2)

$$A = \frac{1}{\Delta t} M + \theta S, B = \frac{1}{\Delta t} M - (1 - \theta) S, M = \int_V \lambda \phi^T \phi dV, \quad (3)$$

$$S = \int_V k d_0 \frac{\partial \phi^T}{\partial z_i} \frac{\partial \phi}{\partial z_i} dV, \omega_{t+\theta} = - \int_{S_q} \hat{q} \phi^T dS + \int_V \varepsilon \phi^T dV \quad (4)$$

$$h_{t+1} = A^{-1} (B h_t + \omega_{t+\theta}) \quad (5)$$

$$A^{-1} = \begin{cases} \Delta t \left(I + \sum_{i=1}^{\infty} (-\theta \Delta t M^{-1} S)^i \right) M^{-1}, & \text{if } \|M\| > \theta \Delta t \|S\| \\ \frac{1}{\theta} \left(I + \sum_{i=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{\theta \Delta t} S^{-1} M \right)^i \right) S^{-1}, & \text{if } \|M\| < \theta \Delta t \|S\| \end{cases} \quad (6)$$

$$h_{t+1} = \begin{cases} \left(I - \sum_{i=1}^{\infty} (-\theta)^{i-1} (\Delta t M^{-1} S)^i \right) h_t + \Delta t \left(I + \sum_{i=1}^{\infty} (-\theta \Delta t M^{-1} S)^i \right) M^{-1} \omega_{t+\theta}, & \text{if } \|M\| > \theta \Delta t \|S\| \\ \left(I + \sum_{i=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{\theta} \right)^{i+1} \left(\frac{1}{\Delta t} S^{-1} M \right)^i \right) h_t + \frac{1}{\theta} \left(I + \sum_{i=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{\theta \Delta t} S^{-1} M \right)^i \right) S^{-1} \omega_{t+\theta}, & \text{if } \|M\| < \theta \Delta t \|S\| \end{cases} \quad (7)$$

$$\delta h_{t+1} = \begin{cases} - \sum_{i=1}^{\infty} (-\theta)^{i-1} (\Delta t)^i L_{i-1} M^{-1} \delta S (h_t + \theta \Delta t M^{-1} \omega_{t+\theta}), & \text{if } \|M\| > \theta \Delta t \|S\| \text{ and } \|M\| > \theta \Delta t \|\hat{S}\| \\ \sum_{i=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{\theta} \right)^{i+1} \left(\frac{1}{\Delta t} \right)^i (N_{i-1} \delta S^{-1} M h_t - N_i \delta S^{-1} \omega_{t+\theta}) + \frac{1}{\theta} \delta S^{-1} \omega_{t+\theta}, & \text{if } \|M\| < \theta \Delta t \|S\| \text{ and } \|M\| < \theta \Delta t \|\hat{S}\| \end{cases} \quad (8)$$

ここに、I: 単位行列, L_{i-1} = $\sum_{j=0}^{i-1} (M^{-1} S)^{i-j-1} (M^{-1} \hat{S})^j$,
 $N_{i-1} = \sum_{j=0}^{i-1} (S^{-1} M)^{i-j-1} (\hat{S}^{-1} M)^j$, $\delta S = S - \hat{S}$, $\delta S^{-1} = S^{-1} - \hat{S}^{-1}$

$$\phi(z, t) = m(z, t) + w(z, t) \quad (\text{ここに、} z: \text{空間座標, } t: \text{時間}) \quad (9)$$

$$\eta(z) = \hat{b} + k(z)^T K^{-1} \hat{w} \quad (10)$$

$$\left(\hat{b} = \frac{\alpha^T K^{-1} \phi}{\alpha^T K^{-1} \alpha}, \hat{w} = \phi - \alpha \frac{\alpha^T K^{-1} \phi}{\alpha^T K^{-1} \alpha} \right)$$

$$\phi^*(z, t) = f(z, t) + \hat{b} + k(z)^T K^{-1} \hat{w} \quad (11)$$

$$\left(m(z, t) = f(z, t) + \hat{b}, w(z) = k(z)^T K^{-1} \hat{w} \right)$$

ここに、α: 成分1が観測数だけ並ぶ定数ベクトル, φ: 観測値ベクトル, k(z): 求める推定点と各観測点間の共分散ベクトル, K: 各観測点間の w(z) の共分散行列。

$$AIC = -2MLL + 2p \quad (MLL: \text{最大対数尤度, } p: \text{パラメータ数}) \quad (12)$$

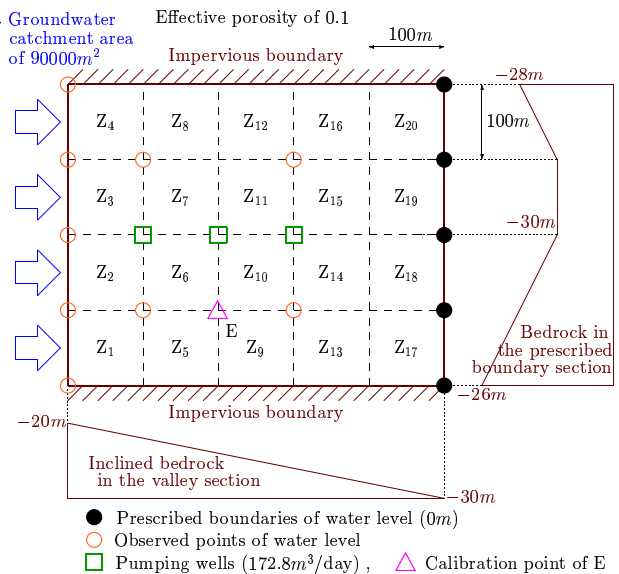


図 1: 仮想不圧帯水層

4. 地下水モデルと透水係数分布

本稿では図1のような仮想不圧帯水層に対して、地下水涵養を施し、数値実験を試みる。ここでは20区域からなる真の透水場を図2の様に用意した。実験ではまず真の状態を順解析で61日分計算し、観測点での模擬観測値を作成した。いまモデルの透水係数分布を図3に示す様に1,2,4,20区域の4ケース設定する。同図区域内の数値は、拡張KalmanフィルタFEM³⁾による逆解析で求めた各ケースの最尤透水係数の同定値 \hat{k} である。この透水係数分布で得られる地下水位の数値解と観測値との誤差から水位の空間不確定量を地盤統計学的に推定し、モデル解析解に補完して得られる水位解の算出を試みる。

Exact	215.3322 (Z ₄)	255.5558 (Z ₈)	321.1791 (Z ₁₂)	400.0000 (Z ₁₆)	383.3276 (Z ₂₀)
	173.9983 (Z ₃)	200.0000 (Z ₇)	272.5400 (Z ₁₁)	329.4123 (Z ₁₅)	346.6049 (Z ₁₉)
	136.6654 (Z ₂)	171.4817 (Z ₆)	226.1393 (Z ₁₀)	273.9904 (Z ₁₄)	300.0000 (Z ₁₈)
	100.0000 (Z ₁)	146.4934 (Z ₅)	194.3980 (Z ₉)	235.9593 (Z ₁₃)	265.2360 (Z ₁₇)

Unit: m/day

図 2: 真の透水係数空間分布設定

Case 1	221.5426 (Z ₁ ~Z ₂₀)				
Case 2	154.8059 (Z ₁ ~Z ₈)	335.7763 (Z ₉ ~Z ₂₀)			
Case 3	206.6947 (Z ₃ , Z ₄ , Z ₇ , Z ₈)	354.0413 (Z ₁₁ , Z ₁₂ , Z ₁₅ , Z ₁₆ , Z ₁₉ , Z ₂₀)			
	118.2425 (Z ₁ , Z ₂ , Z ₅ , Z ₆)	293.4447 (Z ₉ , Z ₁₀ , Z ₁₃ , Z ₁₄ , Z ₁₇ , Z ₁₈)			
Case 4	219.3408	263.1140	289.9044	382.6352	380.4207
	168.8113	224.7142	254.9413	348.1349	352.3683
	135.8332	185.8441	215.4022	273.9089	295.5448
	101.7502	144.2885	180.1621	237.3977	260.8399

Unit: m/day

図 3: ケース毎の区域と空間分布同定

5. 補完量評価と水位変分評価

図1のE点(△)における水位変動を一例として図4に示す。ここに、実線は真の変動値、×、○印は順にモデル解析解、補完モデル解を表す。ケース1のモデル誤差の補完量と変分 δh_t は順に、+と□との差、実線と+との差で表される。ケース2や3の場合も同様に、×と▽との差、*と○との差がモデル誤差の補完量を、実線と×や*との差が δh_t を各々示している。これより不確定量を評価した良好な効果の程が伺える。不確定量を評価した結果で変分も減少して誤差が緩和されていることが分かる。本実験のように、真の透水場とは比較的に異なる分布設定であっても、地盤統計学的評価を行ったモデル誤差の補完はその軽減効果を十分発揮できている。また、式(8)から時間ステップあたりのモデル間差異を推定することも可能である。他の地点上でも同様の傾向が見られ、これらの実験から本稿の地盤統計学的補完モデルの有効性とその変分評価が確認できた。

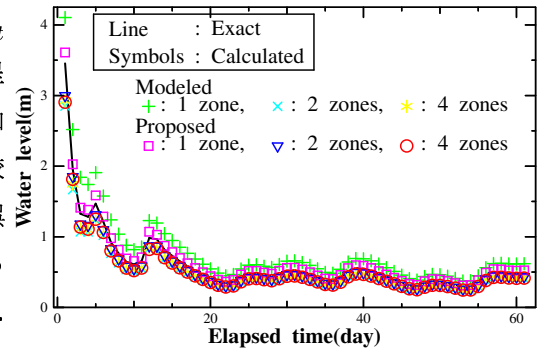


図 4: 水位解の比較

表 1: モデル適合順位

Case	AIC	
	Value	Rank
Case 1 (1 zone)	368.619	4
Case 2 (2 zones)	366.042	3
Case 3 (4 zones)	366.031	1
Case 4 (20 zones)	366.034	2

6. 最適補完推定結果の選択

本実験では真のモデルが不明であってもモデル間の優劣を定量的に決め得る情報量規準の代表例AIC[式(12)]⁴⁾を採用する。各ケース毎にAICを計算し、小さな値ほど適合度は高いと判断して順位を付けた。表1にその結果を示す。同表より、ケース3が最適モデルと判断された。興味深い点としては、真の分布と同じ20区域のケース4がケース3よりも適合度が劣るという結果である。これは、図1に示した観測数・配置(観測条件)が透水係数の未知量に対して不十分なために生じたものと考えられる。このため、ケース4は解の同定精度が低下してケース3よりもモデル誤差が大きくなったと考えられる。逆に、ケース3は観測条件が未知量に見合ったものであったと言える。よって、上記の様に行えば所与の観測条件に見合い、かつ、モデル誤差の補完で改善された最適なモデルを選択することができ、再現推定計算モデルの選択に客観性を持って臨めると言える。

7. 結論

本研究では、様々な分布モデル透水場間の差異から生じる水位変分を明確化すべく数式で検討した。また数値実験から、真の透水場とそのモデル場の違いによる水位変分の時間変動とともに、補完モデル解による精度向上が確認できた。さらに、AICによる最適モデル選択では、観測条件に適うモデルが客観的に選ばれた。

参考文献

1) 浜口俊雄: 不良な計測情報下でのCokrigingによる地下水位分布の最適推定と相互相関的補間効果, 水工学論文集, 第45巻, pp.343-348, 2001. 2) 浜口俊雄: 地下水流況推定における地盤統計学的アプローチの効用, 京都大学防災研究所年報, 第44号B-2, pp.455-463, 2001 3) 例えば, 浜口俊雄・村上 章・長谷川高士: 平面解析で移動境界を考慮した地下水モデルと逆解析への応用, 土木学会論文集, No.568/III-39, pp.133-145, 1997. 4) Parzen, E., Tanabe, K. and Kitagawa, G. Editors: Selected paper of Hirotugu Akaike, Springer, pp.215-222, 1998.