

衝撃力が作用する梁の減衰定数と剛性の同定

松江工業高等専門学校	正会員	○柴田俊文
北海道大学大学院	フェロー	三上 隆
(株)地崎工業	正会員	須藤敦史
北海道大学大学院	正会員	蟹江俊仁

1. はじめに

衝撃力が作用する構造物の信頼性・安全性を検討するには衝撃力・構造物の挙動を正確に把握することが重要であり、梁の減衰や剛性の確定が必要である。本研究では、両端単純支持梁中央に衝撃力が作用する場合を考え、梁中央の変位波形より拡張カルマンフィルタを用いて減衰定数と剛性の同時同定の基礎的検討を行う。減衰を考慮して解析する場合、モーダル減衰がよく用いられるが、主要な振動モードを特定するのが困難である。本研究では減衰が剛性に比例すると仮定し、直接マトリックス演算を行って同定する。

2. 拡張カルマンフィルタによる同定

拡張カルマンフィルタのアルゴリズムは以下である。

$$\mathbf{M}_t = \Phi_{t-1} \mathbf{P}_{t-1} \Phi_{t-1}^T + \Gamma_{t-1} \mathbf{Q}_{t-1} \Gamma_{t-1}^T, \quad \mathbf{x}_{t;k+1} = \mathbf{x}_{t;k} + \mathbf{K}_t (\mathbf{y}_t - \mathbf{h}_t(\mathbf{x}_{t;k})) + \mathbf{P}_{t;k} \mathbf{M}_t^{-1} (\bar{\mathbf{x}}_t - \mathbf{x}_{t;k}) \quad (1), (2)$$

$$\mathbf{K}_{t;k} = \mathbf{P}_{t;k} \mathbf{H}_{t;k}^T \mathbf{R}_t^{-1}, \quad \mathbf{P}_{t;k} = (\mathbf{M}_t^{-1} + \mathbf{H}_{t;k}^T \mathbf{R}_t^{-1} \mathbf{H}_{t;k})^{-1} \quad (3), (4)$$

ここで $\mathbf{h}_t$ は非線形関数、 Γ_t は変換行列、 $\mathbf{y}_t$ は観測ベクトル、 Φ_{t-1} 、 $\mathbf{H}_{t;k}$ は変換行列を表す。また $\mathbf{K}_{t;k}$ はカルマンゲイン、 $\hat{\mathbf{x}}_{t-1}$ は状態量 $\mathbf{x}_t$ の最適推定値、 $\mathbf{P}_{t-1}$ は推定値の誤差共分散行列、 $\mathbf{Q}_t$ はシステムノイズ分散、 $\mathbf{R}_t$ は観測誤差分散である。本研究では時間領域において減衰定数と断面二次モーメント（剛性）の2つのパラメータを状態量とし、梁中央の変位波形を観測値とする。拡張カルマンフィルタと有限要素法との組み合わせを考えるため、状態方程式は定常性を示すものと仮定し、システムノイズを無視すると単位行列 $\mathbf{I}$ を用いて式(5)が得られる。

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{I} \mathbf{x}_{t-1} \quad (5)$$

また、変換行列 $\mathbf{H}_{t;k}$ は影響係数法より値を定める。

3. 時刻 $t=k-1$ の条件

ここで式(2)を以下のように表示する。

$$\mathbf{x}_{t;k+1} = \mathbf{x}_{t;k} + \mathbf{K}_t (\mathbf{y}_t - \mathbf{h}_t(\mathbf{x}_{t;k}, \mathbf{u}_{t-1}, \dot{\mathbf{u}}_{t-1})) + \mathbf{P}_{t;k} \mathbf{M}_t^{-1} (\bar{\mathbf{x}}_t - \mathbf{x}_{t;k}) \quad (6)$$

$\mathbf{u}_{t-1}$ 、 $\dot{\mathbf{u}}_{t-1}$ はそれぞれ $t=k-1$ の変位、速度を示し、解析開始時には初期条件 $\mathbf{u}_0=0$ 、 $\dot{\mathbf{u}}_0=0$ となる。以後、この $t=k-1$ の条件に関して説明を加える。

図-1 に解析手順を示す。ここで、図-1(a)は $t=k-1$ の条件と観測値が一致している例であり、状態量以外は観測値と全て同じ条件であるため、同定を行うには最も望ましい状態である。しかし、 $t=k-1$ の条件は有限要素法で離散化（後述）した梁の各節点の変位、速度であり、既知の値（観測値）は梁中央のみである。一方、図-1(b)は $t=k-1$ の条件と観測値が一致していない場合であり、前ステップで解析した際の応答値を $t=k-1$ の条件とする方法はこちらの図の状態になる。この場合、各時刻・各節点の条件は自動的に設定されるが、 $t=k-1$ の梁中央の値が異なるため精度の良い同定値を望むことは難しい。

そこで本研究では応答波形と求める時刻の観測値の差に加え、 $t=k-1$ の条件と観測値の差を考慮にいたれたアルゴリズムを提案する（アルゴリズム A）。時刻 $t=k-1$ の条件は前の時刻の応答値、初期値は前の時刻の同定値を使用する。 $t=k-1$ の条件（梁中央の変位）と観測値の差 δ_0 を求めておき、 $t=k$ （ k は求める同定値の時刻）の応答値と観測値（ $t=k$ ）の差 δ_1 と δ_0 の差を用いて同定を行うとすると式(7)、(8)となる。

$$\mathbf{x}_{t;k+1} = \mathbf{x}_{t;k} + \mathbf{K}_t (\mathbf{y}_t - \mathbf{h}'_t(\mathbf{x}_{t;k}, \mathbf{u}_{t-1}, \dot{\mathbf{u}}_{t-1})) + \mathbf{P}_{t;k} \mathbf{M}_t^{-1} (\bar{\mathbf{x}}_t - \mathbf{x}_{t;k}) \quad (7)$$

$$\mathbf{h}'_t(\mathbf{x}_{t;k}, \mathbf{u}_{t-1}, \dot{\mathbf{u}}_{t-1}) = \mathbf{h}_t(\mathbf{x}_{t;k}, \mathbf{u}_{t-1}, \dot{\mathbf{u}}_{t-1}) + \delta_1 - \delta_0 \quad (8)$$

キーワード 衝撃力、拡張カルマンフィルタ、梁、減衰定数、剛性

連絡先 〒690-8518 島根県松江市西生馬町 14-4 松江工業高等専門学校 土木工学科

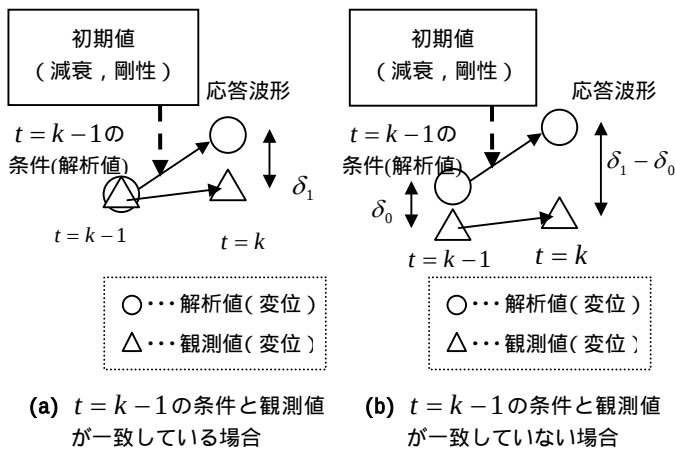


図-1 解析手順

ここで、 $t=k-1$ の条件の与え方がアルゴリズム A と同様であるが δ_0 (図-1(b)) を無視して解析 (アルゴリズム B) したものと、順解析をして求めた変位・速度の各時刻の条件を用いて解析 (アルゴリズム C) したものと比較する。

4. 数値解析例

本研究では衝撃力波形 (図-2(a)) は既知であるものとし、解析的に作成した応答 (変位) 波形 (図-2(b)) を観測値 (理論値と称する) として数値検討を行う。両端単純支持梁中央に衝撃力 f が作用する場合を考え、Timoshenko 梁理論に基づくはり要素により、梁全体を有限要素法により 50 分割して解析を行う。時間積分には Newmark β 法 ($\beta=0.25$)、梁の減衰は剛性マトリックスに比例すると考える。ここで、減衰定数及び断面二次モーメントを状態量とし、同定した断面二次モーメントから有効断面積を換算し、曲げ剛性、伸び剛性を算出した。数値解析に用いる梁は $b/h=1.0$ 、 $L/h=10$ 、 $EI/\kappa AGL^2=0.237 \times 10^{-2}$ 、 $I/AL^2=0.833 \times 10^{-3}$ 、 $\kappa=10(1+\nu)/(12+11\nu)=0.845$ 、 $\nu=0.2$ である。ここで、 b は梁の幅、 h は梁の高さ、 L は梁の長さ、 E は縦弾性係数、 I は断面二次モーメント、 G はせん断弾性係数、 A は断面積、 ν はポアソン比、 κ はせん断補正係数を示す (ただしここでの I と A は全断面有効)。また梁の減衰定数 ζ は $\zeta_0=0.1$ を用い、上端からの距離 h_e までを有効断面として $h_e/h=0.8$ として理論値を求めている (以後、 ζ_0 、 $I_0=bh_e^3/12$ を厳密解と称する)。解析結果の図では、縦軸をそれぞれ厳密解で無次元化した減衰定数、断面二次モーメントとし、横軸を無次元化時間 tc/h ($c(=\sqrt{E/\rho})$ は縦波の速度、 ρ は密度) としている。また、時間刻みは最低次固有周期の $1/1000$ 以下とし、微小増分は $\Delta x_1/\zeta_0=0.01$ 、 $\Delta x_2/I_0=1.0 \times 10^{-6}$ を用いて解析を行う。初期推定誤差共分散 P_0 と観測誤差分散 R_t については減衰定数と断面二次モーメントを状態量に設定しているため、それぞれ P_0 の値を設定 (P_{0d} 、 P_{0I} とする) し、 $P=P_{0d}/P_{0I}$ と表すことによって結果を整理する。なお、 R_t は時刻によらず一定と考え、 $R_t^*=R_t/h^2=1.0$ とした。

最初に前述したアルゴリズム A、B 及び C の解析結果を示す。図-3(a)、(b) にそれぞれ同定した減衰定数、断面二次モーメントを示す。アルゴリズム A、B 及び C の結果を実線 (図中では The Proposed で表示)、一点鎖線 (The Proposed(2)) 及び破線 (Exact) で示す。初期推定値はそれぞれ $\zeta/\zeta_0=0.5$ 、 $I/I_0=0.7$ とした。また $P=0.5 \times 10^9$ として解析を行った。アルゴリズム B は数値が不安定になっている。またアルゴリズム A による解析結果は、アルゴリズム C と比較すると、わずかに同定値の安定が遅れている程度で良好である。以上より本研究で提示するアルゴリズムの適用性を確認することが出来る。また、図-4(a)、(b) は減衰定数を一定とし、剛性が変化 (それぞれ $tc/h=25$ 、 50 で $1/2$ に変化) するケースについて解析したものであり、実線が解析結果で破線が厳密解である。剛性の変化に対して同定値が追従するのがやや遅いが、良好な結果が得られていることがわかる。

5. まとめ

拡張カルマンフィルタによる梁の減衰定数と剛性の同時同定の適用性を示した。また、時刻 $t=k-1$ の条件を適切に設定するアルゴリズムにより良好な同定値が得られた。

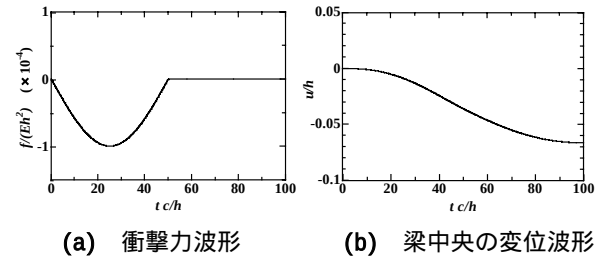


図-2 解析に用いた理論値

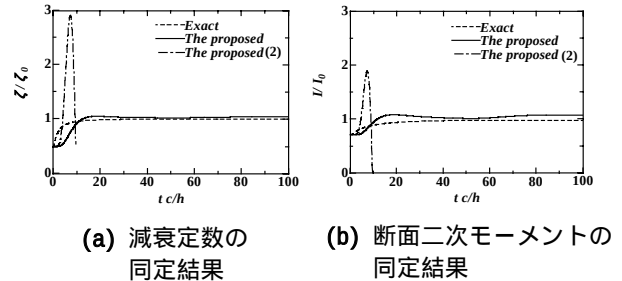
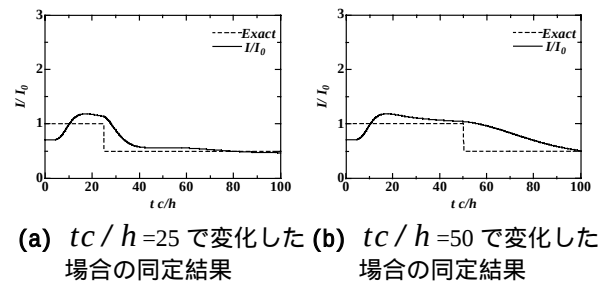
図-3 $t=k-1$ の条件の影響

図-4 剛性が変化した際の結果