

多径間連続はりの振動に及ぼす非線形反りの影響

東京理科大学 学生員 鈴木 啓悟

東京理科大学 正会員 臼木 恒雄

1. はじめに

近年、橋梁などの大型で薄肉の構造系が採用されるに伴い、せん断遅れなどの現象が顕著に現れ、平面保持の仮定は現実味が薄くなっている。またこの様な薄肉構造物では、振動現象の正確な把握無くして、適切な設計は履行し得ない。これらの観点より、本研究では従来の規準とされていた Timoshenko はりの支配方程式を 1 段階あげた高次はり理論（以後、この高次理論(Higher-order beam theory)はりを H はりと称する）の支配方程式に拡張することにより、非線形の軸方向反り関数の影響を取り込むことが可能となった。また通常の伝達マトリックス法では、状態量およびその正負の定義を適切に行えば、副対角線に伝達要素が対称となる関係が存在する。本研究課題の高次理論でもこの関係の成り立つことを示した。単純および連続鋼 2 主桁端の自由振動の例題を解くことにより、固有振動数に与えるはりにおける軸方向反りの非線形成分の影響を Bernoulli/Euler はり（以後、B/E はりと略称）および Timoshenko はりと比較する形で明確にした。

2. 理論展開

単一変位成分のみの微分方程式において、せん断遅れを 1 段階まで考慮するならば、はりの支配方程式は

$$\left. \begin{aligned} EI_{y0} \frac{\partial^2 \theta_{y0}}{\partial x^2} + GA\kappa_{00} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \theta_{y0} \right) + GA\kappa_{01} (-\theta_{y1}) - \rho I_{y0} \frac{\partial^2 \theta_{y0}}{\partial t^2} &= -m_{y0}(t, x) \\ EI_{y1} \frac{\partial^2 \theta_{y1}}{\partial x^2} + GA\kappa_{10} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \theta_{y0} \right) + GA\kappa_{11} (-\theta_{y1}) - \rho I_{y1} \frac{\partial^2 \theta_{y1}}{\partial t^2} &= -m_{y1}(t, x) \\ GA\kappa_{00} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \theta_{y0}}{\partial x} \right) + GA\kappa_{01} \left(-\frac{\partial \theta_{y1}}{\partial x} \right) - \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= -q(t, x) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

固有振動の運動方程式は外力を零とおく。すなわち(1)式の右辺は零とする。式(1)を変形すると変位量 θ_{y0} のみの微分方程式を得る。たわみ w のみあるいは変位量 θ_{y1} のみの微分方程式も同様に得られる。0 段階考慮に相当する Timoshenko はりのたわみ w まだは断面回転 θ のみの 4 回微分方程式はせん断遅れを 1 段階考慮することで 6 階の微分方程式となる。この支配方程式の特性方程式は 6 次式

$$\lambda^6 + a\lambda^4 + b\lambda^2 + c = 0 \quad (2)$$

となる。 $\lambda^2 = \Lambda$ として Cardan の解法で解くと、各状態量は任意定数と基本解との線形和で表現できる。基本解に境界条件を代入し、任意の位置における、伝達マトリックスを得る。このマトリックスは副対角線に対称である。

副対角線に関して対称

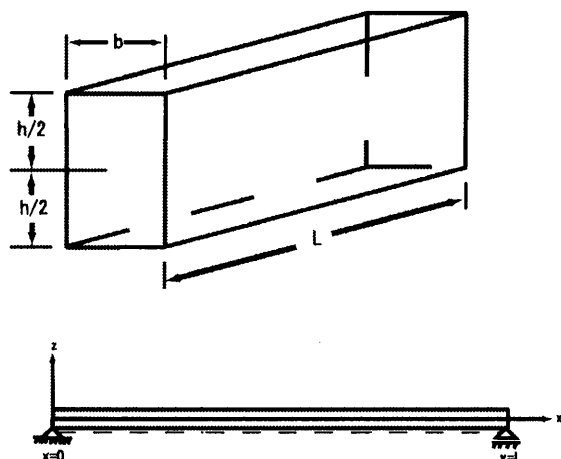
$$\begin{pmatrix} W(\omega_1, x_1) \\ \theta_{y0}(\omega_1, x_1) \\ \theta_{y1}(\omega_1, x_1) \\ M_{y1}(\omega_1, x_1) \\ M_{y0}(\omega_1, x_1) \\ Q_{z0}(\omega_1, x_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & t_{14} & t_{15} & t_{16} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & t_{24} & t_{25} & t_{26} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & t_{34} & t_{35} & t_{36} \\ t_{41} & t_{42} & t_{43} & t_{44} & t_{45} & t_{46} \\ t_{51} & t_{52} & t_{53} & t_{54} & t_{55} & t_{56} \\ t_{61} & t_{62} & t_{63} & t_{64} & t_{65} & t_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W(0) \\ \theta_{y0}(0) \\ \theta_{y1}(0) \\ M_{y1}(0) \\ M_{y0}(0) \\ Q_{z0}(0) \end{pmatrix}$$

Keywords: 伝達マトリックス, 高次はり理論, 相反関係, せん断遅れの影響, 自由振動, 2 主桁橋

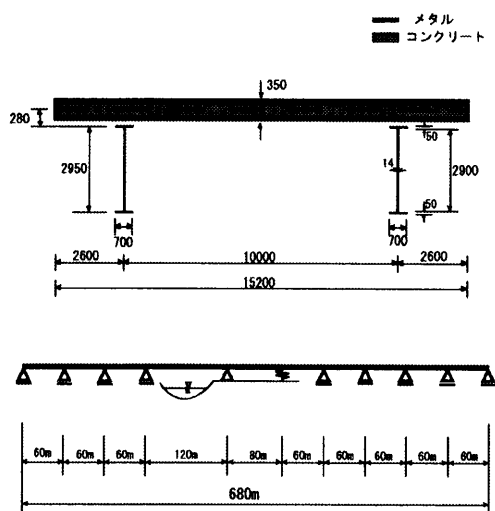
東京理科大学理工学部土木工学科(〒278-8510 千葉県野田市山崎 2641)

3. 数値計算例

(1) 両端単純支持はりの自由振動



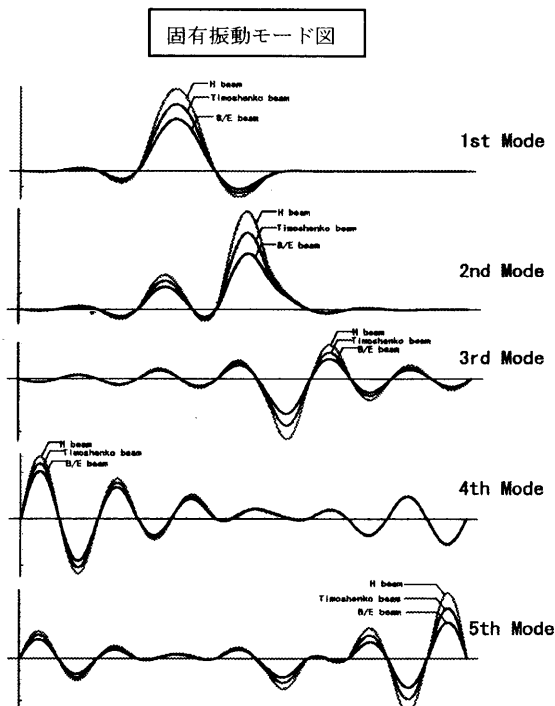
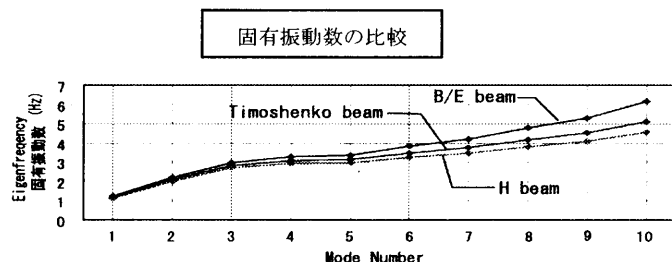
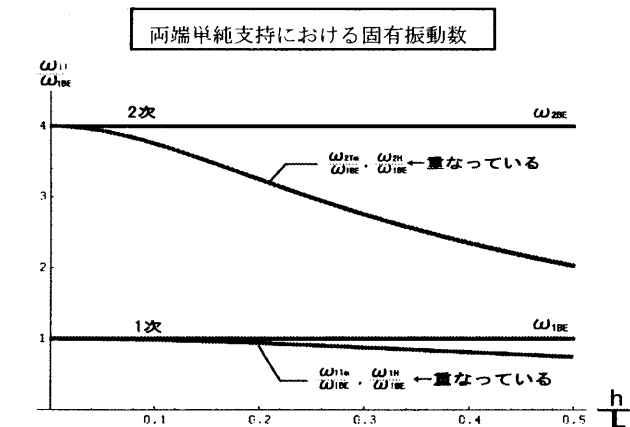
(2) 連続鋼2主桁橋の自由振動



4. 解析結果

(1) 両端単純支持はりにおける、固有振動数の関係を下に示した。B/E はりと Timoshenko はりとでは大きな差が生じている。支間長 L に対して断面高さ h の比率が高くなることによってその差は大きくなることから、せん断変形の影響は支間長と断面形状に大きく関係している事がわかる。Timoshenko はりと H はりにおいてはその差がほとんど生じていない。固有振動数の大小関係は、 $\omega_{B/E} > \omega_{Timo} \approx \omega_H$ となった。

(2) 連続鋼2主桁橋の計算結果を下図に示す。固有振動モード図は相似形であることが見てとれる。固有振動数の大小関係は、 $\omega_{B/E} > \omega_{Timo} > \omega_H$ であり、この関係はモードナンバーに関係なく保たれた。固有振動数の差は高次モードになるにつれて広がり、H はりの値に対して1次モードでB/E はりが約8%、Timoshenko はりが約4%大きな値が算出され、10次モードに至っては、B/E はりが約35%、Timoshenko はりは約16%もの大きな値が算出された。



(1), (2) をふまえると、せん断遅れの影響は単純はりのような構造系ではあまり出ず、連続はりのような構造系において大きくなると言える。

参考文献 1) Hjelmstad, K. D. : J. E. M Vol. 113 pp. 907-924, 1987

2) Usuki, T. and Sawada, T. : Structural

Eng./Earthquake Eng., JSCE, Vol. 16, No1, pp. 57-88, 1991

3) 近藤恭平：振動論 培風館 1993 年